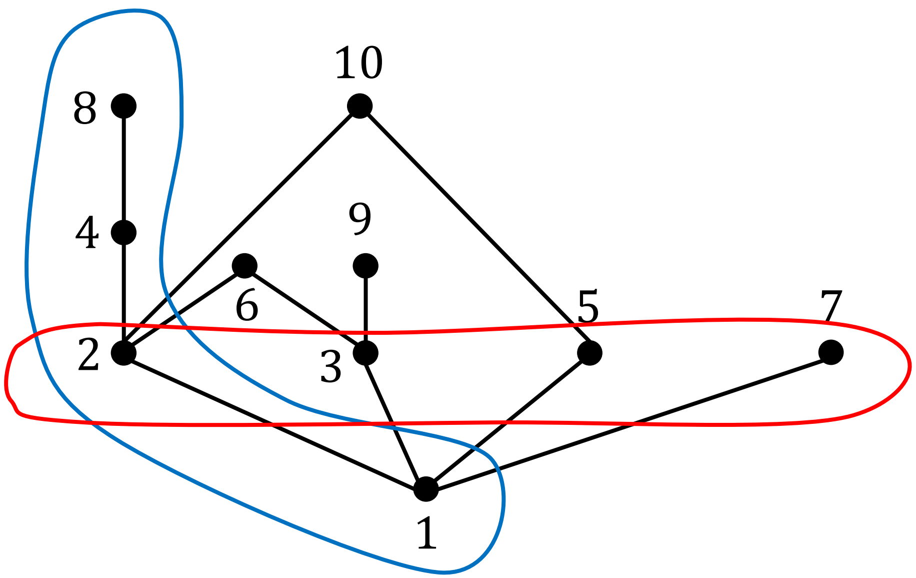
或者“宽”或者“高”

链与反链

对有限偏序集$(S, \preccurlyeq)$，$A \subseteq S$，A被称为

- 链(Chain)：如果对任意$x, y \in A$, $x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$。
- 反链(Antichain)：如果对任意$x \neq y \in A$, $x \npreccurlyeq y$。反链也称为独立集(Independent set)。

例：$(\{1,2, \dots, 10\}, |)$

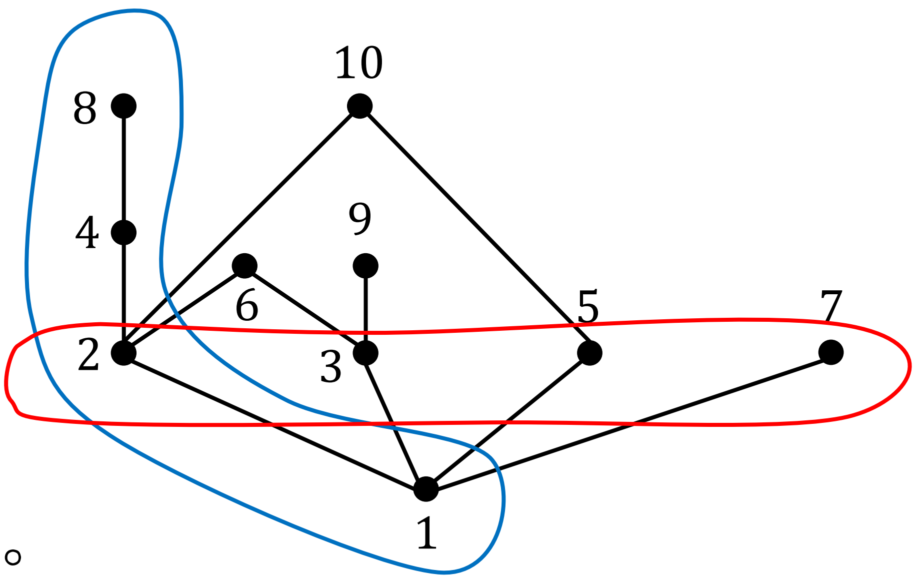


链与反链

对有限偏序集$(S, \preccurlyeq)$, $x, y \in S$，称x, y

- 可比较(Comparable): 若$x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$。
- 不可比较(Incomparable): 若$x \npreceq y$ 且 $y \npreceq x$。

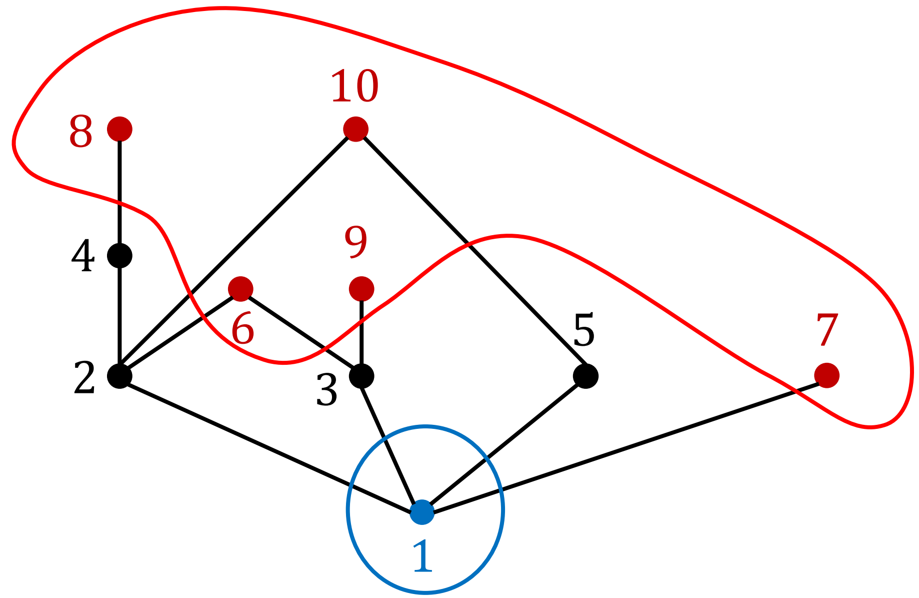
例：$(\{1,2, \dots, 10\}, |)$



- 链：**可比较元素**的集合。
- 反链：**不可比较元素**的集合。

注意：极大元、极小元的集合组成反链。

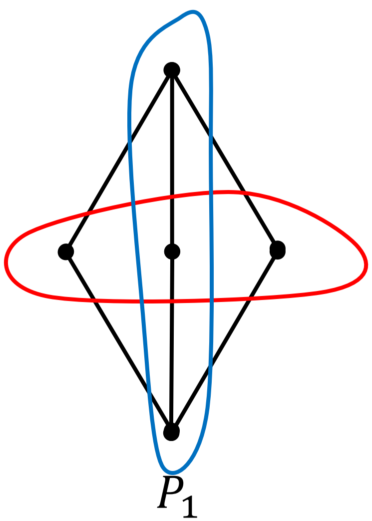
- 例：
  $(\{1,2,\ldots,10\},|)$



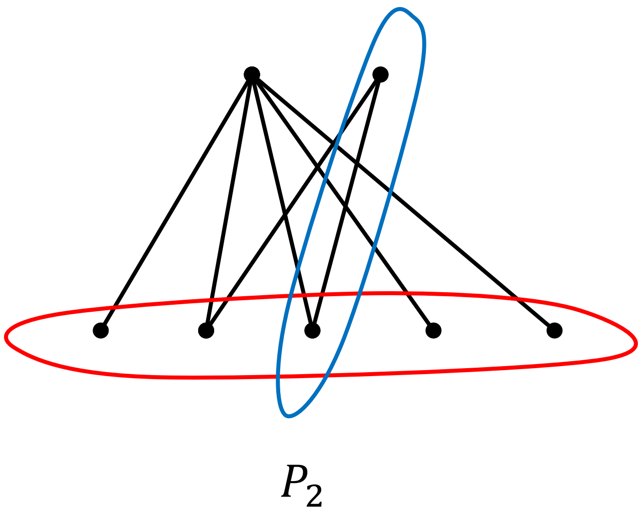
最大独立集和最长链

给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$

- $\alpha(P)=\max\{|A|: A是P上的反链（独立集）\}$
- $\omega(P)=\max\{|A|: A是P上的链\}$



$\alpha(P_1)=3$
$\omega(P_1)=3$



$\alpha(P_2)=5$
$\omega(P_2)=2$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\,\middle|\,\begin{array}{l}S=A_1\cup\cdots\cup A_k,\\ 1\le i\le k,\ A_i\text{ 是反链,}\\ \text{任意}1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset.\end{array}\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\,\middle|\,\begin{array}{l}S=A_1\cup\cdots\cup A_k,\\ 1\leq i\leq k,\ A_i\text{ 是反链},\\ \text{任意}1\leq i\neq j\leq k,\ A_i\cap A_j=\emptyset.\end{array}\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

证明：

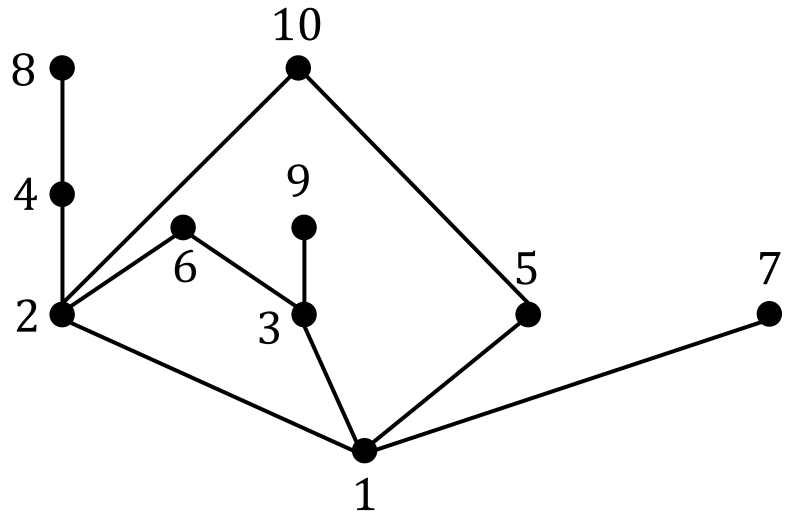
最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t = \min \left\{ k \;\middle|\; \begin{array}{l} S = A_1 \cup \cdots \cup A_k, \\ 1 \le i \le k,\ A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意} 1 \le i \ne j \le k,\ A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right\}$$

则$t = \omega(P)$.

例：



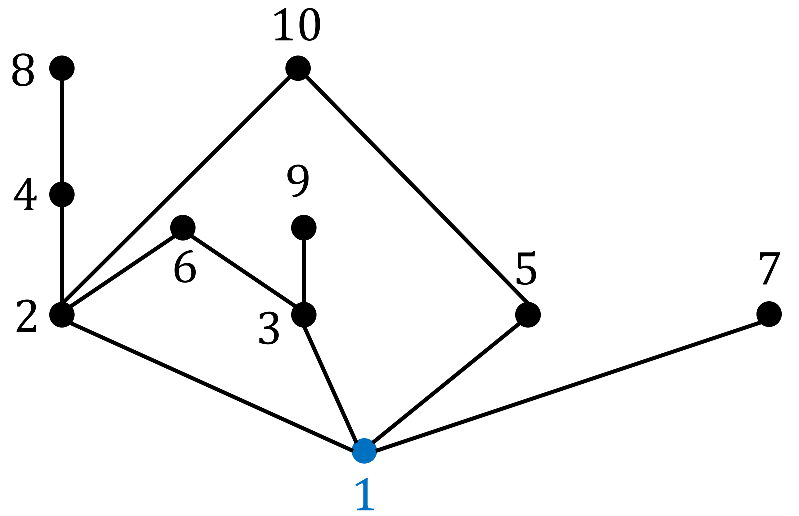
最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k \,\middle|\, \begin{array}{l} S=A_1\cup\cdots\cup A_k, \\ 1\le i\le k,\ A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意} 1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset. \end{array}\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

例：



$A_1=\{1\}$

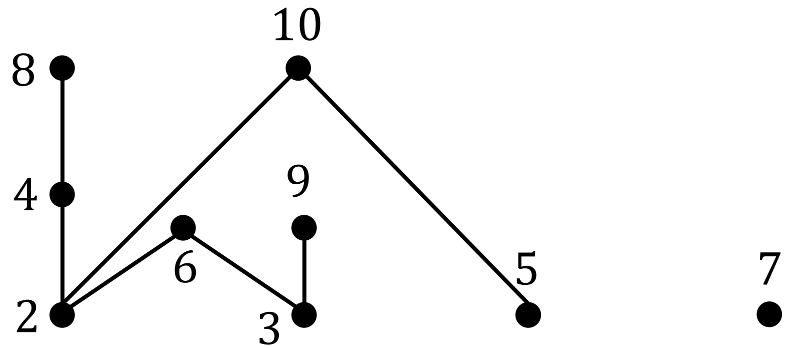
最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t = \min\left\{ k \,\middle|\, \begin{array}{l} S = A_1 \cup \cdots \cup A_k, \\ 1 \le i \le k,\ A_i \text{ 是反链}, \\ \text{任意} 1 \le i \ne j \le k,\ A_i \cap A_j = \emptyset. \end{array} \right\}$$

则$t = \omega(P)$.

例：



$A_1 = \{1\}$

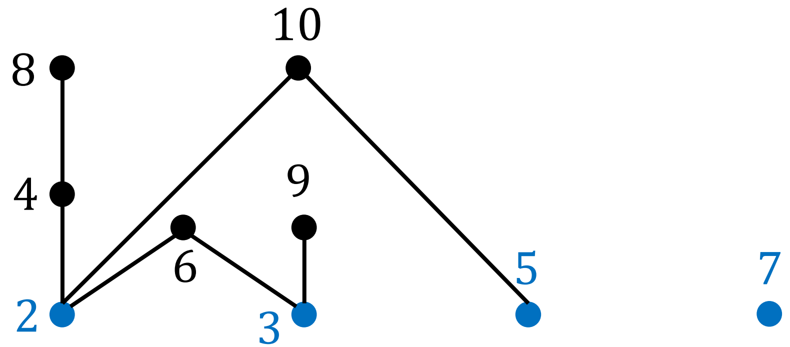
最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\,\middle|\,\begin{array}{l}S=A_1\cup\cdots\cup A_k,\\ 1\le i\le k,\ A_i\text{ 是反链},\\ \text{任意}1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset.\end{array}\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

例：



$A_2=\{2,3,5,7\}$

$A_1=\{1\}$

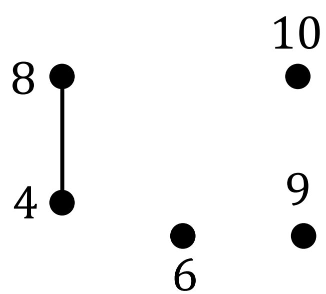
最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\,\middle|\,\begin{array}{l} S=A_1\cup\cdots\cup A_k, \\ 1\le i\le k,\ A_i\ \text{是反链}, \\ \text{任意}1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset. \end{array}\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

例：



$A_2=\{2,3,5,7\}$

$A_1=\{1\}$

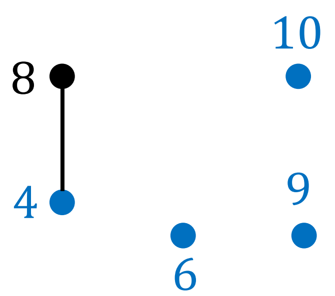
最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\left|\begin{array}{l}S=A_1\cup\cdots\cup A_k,\\ 1\le i\le k,\ A_i\text{ 是反链},\\ \text{任意}1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset.\end{array}\right.\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

例：



$A_3=\{4,6,9,10\}$

$A_2=\{2,3,5,7\}$

$A_1=\{1\}$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\,\middle|\,\begin{array}{l}S=A_1\cup\cdots\cup A_k,\\ 1\le i\le k,\ A_i\text{ 是反链},\\ \text{任意}1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset.\end{array}\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

例：

8 ●

$A_3=\{4,6,9,10\}$

$A_2=\{2,3,5,7\}$

$A_1=\{1\}$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\,\middle|\,\begin{array}{l} S=A_1\cup\cdots\cup A_k,\\ 1\le i\le k,\ A_i\text{ 是反链},\\ \text{任意}1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset. \end{array}\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

例：

$$A_4=\{8\}$$

$$A_3=\{4,6,9,10\}$$

$$A_2=\{2,3,5,7\}$$

$$A_1=\{1\}$$

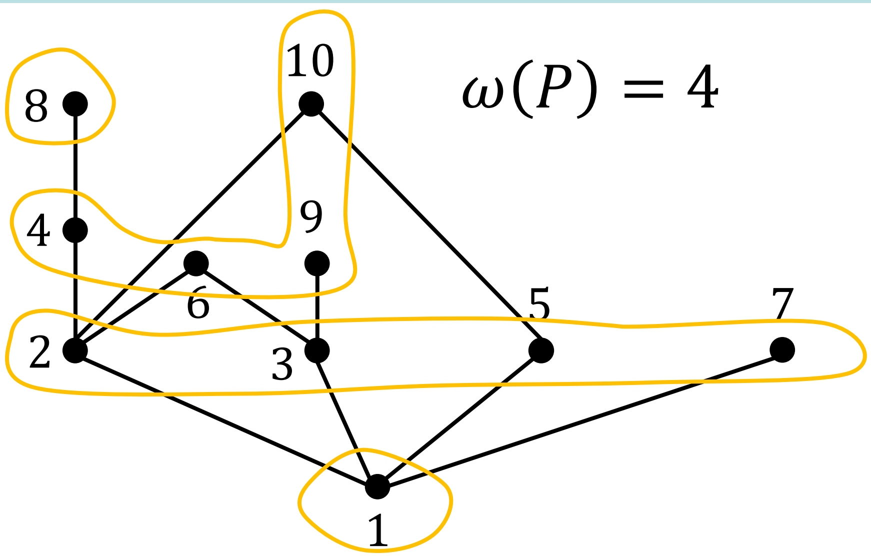
最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\left|\begin{array}{l} S=A_1\cup\cdots\cup A_k,\\ 1\le i\le k,\ A_i \text{ 是反链},\\ \text{任意}1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset. \end{array}\right.\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

例：



$\omega(P)=4$

$A_4=\{8\}$

$A_3=\{4,6,9,10\}$

$A_2=\{2,3,5,7\}$

$A_1=\{1\}$

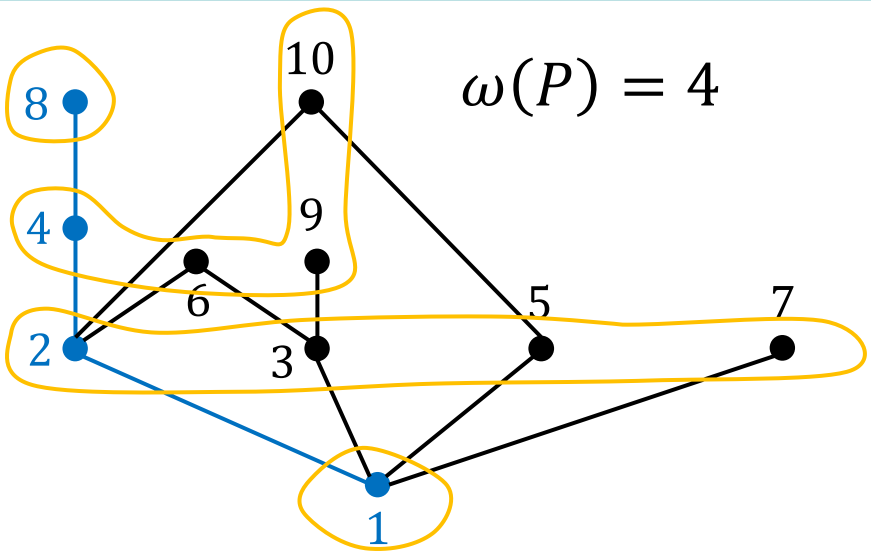
最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\left|\begin{array}{l} S=A_1\cup\cdots\cup A_k,\\ 1\le i\le k,\ A_i\text{ 是反链},\\ \text{任意}1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset.\end{array}\right.\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

例：



$\omega(P)=4$

$A_4=\{8\}$

$A_3=\{4,6,9,10\}$

$A_2=\{2,3,5,7\}$

$A_1=\{1\}$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\left|\begin{array}{l}S=A_1\cup\cdots\cup A_k,\\ 1\le i\le k,\ A_i\text{ 是反链},\\ \text{任意}1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset.\end{array}\right.\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

证明： $\omega(P)\le t$

$S=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_t$ ，其中$\{A_1,\ldots,A_t\}$为不相交的反链划分，

$C\subseteq S$ 是P中*任意*一条链， 有 $|C\cap A_i|\le 1.$

$$\begin{aligned}|C|=|C\cap S|&=|C\cap(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_t)|\\&=|(C\cap A_1)\cup\cdots\cup(C\cap A_t)|\\&\le t\end{aligned}$$

最长链长度 = 最小反链划分数

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，将S划分成若干不相交的反链集，取最小划分数t，即

$$t=\min\left\{k\,\middle|\,\begin{array}{l}S=A_1\cup\cdots\cup A_k,\\ 1\le i\le k,\ A_i\text{ 是反链},\\ \text{任意}1\le i\ne j\le k,\ A_i\cap A_j=\emptyset.\end{array}\right\}$$

则$t=\omega(P)$.

证明： $\omega(P)\ge t$

$A_1=S$ 的极小元集合，

$A_{i+1}=S\setminus(A_1\cup\cdots\cup A_i)$ 的极小元集合。

每一个A_i都是一个反链（独立集）。

有限步后$A_1\cup\cdots\cup A_m=S$。

由t的最小性，$m\ge t$ 。 只需证明，$\omega(P)\ge m$ 。

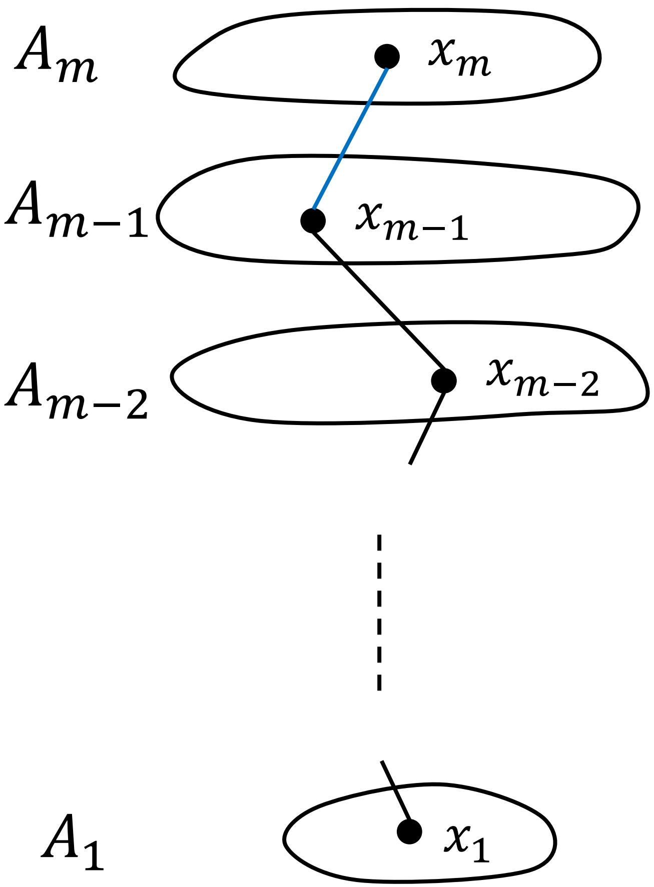
有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，$A_1, A_2, \ldots, A_m$.

$A_1 = S$ 的极小元集合，

$A_{i+1} = S \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_i)$ 的极小元集合。

证明：$\omega(P) \geq m$

思路：找长度为m 的链。



任取 $x_m \in A_m$

问：x_m不属于A_{m-1}的原因是什么?

答：x_m不是 $S \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{m-2})$ 的极小元。

故：存在$x_{m-1} \in A_{m-1}$，$x_{m-1} \prec x_m$.

问：x_{m-1}不属于A_{m-2}的原因是什么?

⋮

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_{m-1} \prec x_m.$$

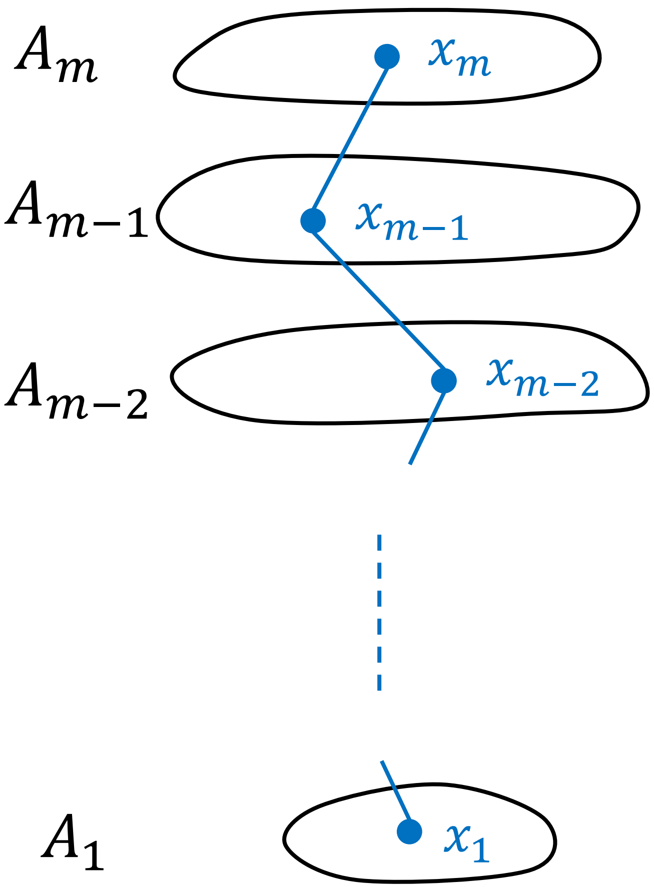
证明：$\omega(P) \geq m$

有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，$A_1, A_2, \ldots, A_m$.

$A_1 = S$ 的极小元集合，

$A_{i+1} = S \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_i)$ 的极小元集合。

思路：找长度为m 的链。



任取 $x_m \in A_m$

问：x_m不属于A_{m-1}的原因是什么?

答：x_m不是 $S \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{m-2})$ 的极小元。

故：存在$x_{m-1} \in A_{m-1}$，$x_{m-1} \prec x_m$.

问：x_{m-1}不属于A_{m-2}的原因是什么?

$\vdots$

$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_{m-1} \prec x_m$.

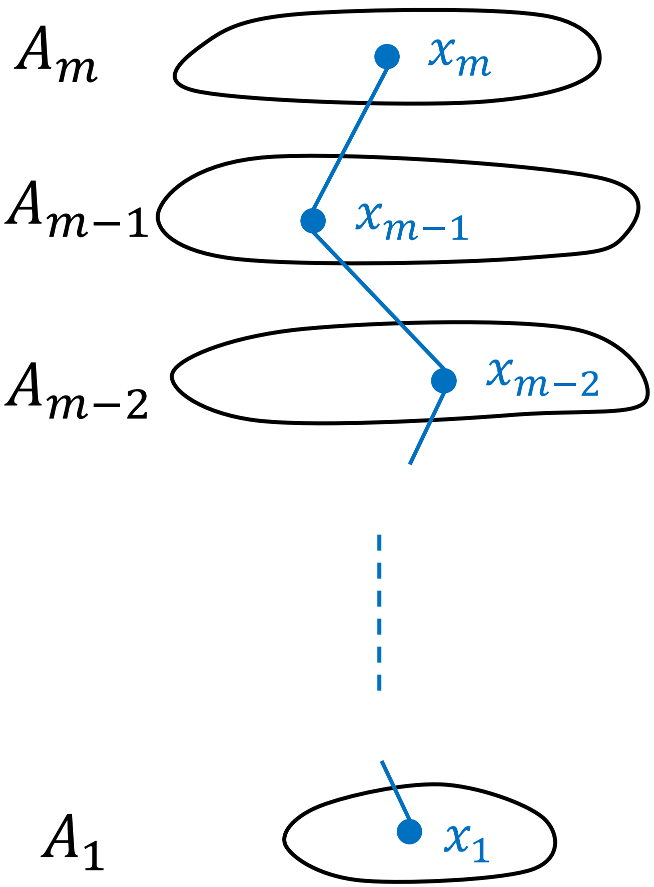
证明：$\omega(P) \geq m$

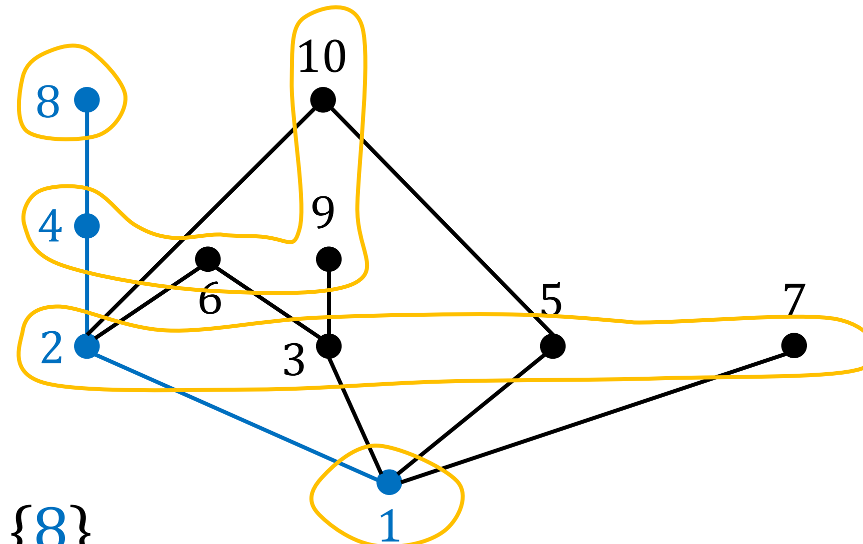
有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，$A_1, A_2, \ldots, A_m$.

$A_1 = S$ 的极小元集合，

$A_{i+1} = S \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_i)$ 的极小元集合。

思路：找长度为m 的链。





$A_4 = \{8\}$

$A_3 = \{4,6,9,10\}$

$A_2 = \{2,3,5,7\}$

$A_1 = \{1\}$

$\omega(P) = 4$

- **定理：** 给定有限偏序集 $P = (S, \preccurlyeq)$，
  $\max\{|C|: C\text{是}P\text{上的链}\} = \min\{|\Pi|: \Pi\text{是}S\text{的反链划分}\}$.
- **推论：** 给定有限偏序集 $P = (S, \preccurlyeq)$

$$\alpha(P) \cdot \omega(P) \geq |S|.$$

证明：

$$P = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t$$

$$t = \omega(P)$$

$$|A_i| \leq \alpha(P)$$

$$|S| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_t| \leq \alpha(P) \cdot \omega(P)$$

- **定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，
$\max\{|C|: C\text{是}P\text{上的链}\}=\min\{|\Pi|: \Pi\text{是}S\text{的反链划分}\}.$
- **推论：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$
$$\alpha(P)\cdot\omega(P)\geq|S|.$$

对任意有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$， $\alpha(P)$或$\omega(P)$之一至少为$\sqrt{|S|}$。
直观：任意有限偏序集或者“宽”，或者“高”。

定理的应用

- Erdös-Szekeres引理：

  任意含有n^2+1个元素的实数序列$(x_1, \dots, x_{n^2+1})$中都含有一个长度为$n+1$的单调子序列。

定理的应用

- Erdös-Szekeres引理：

  任意含有n^2+1个元素的实数序列$(x_1,\ldots,x_{n^2+1})$中都含有一个长度为$n+1$的单调子序列。

例： $n=3$, (1, 2, 10, 4, 3, 5, 1, 6, 5, 8)

定理的应用

- Erdös-Szekeres引理：

任意含有n^2+1个元素的实数序列$(x_1,\ldots,x_{n^2+1})$中都含有一个长度为$n+1$的单调子序列。

例： $n=3$, (1, 2, 10, 4, 3, 5, 1, 6, 5, 8)

定理的应用

- Erdös-Szekeres引理：

任意含有n^2+1个元素的实数序列$(x_1,\dots,x_{n^2+1})$中都含有一个长度为$n+1$的单调子序列。

证明：　对$(x_1,\dots,x_{n^2+1})$，设$I=\{1,2,\dots,n^2+1\}$

在集合I上定义关系$\preccurlyeq$: $i \preccurlyeq j$ 当且仅当 $(i \le j) \wedge (x_i \le x_j)$

$(I,\preccurlyeq)$ 是偏序集。

- $\omega(I,\preccurlyeq) > n$：非递减子序列 $x_{i1} \le x_{i2} \le \cdots \le x_{im}$.
- $\alpha(I,\preccurlyeq) > n$：独立集$\{i_1,i_2,\dots,i_m\}$, 设$i_1 < i_2 < \cdots < i_m$

$x_{i1} > x_{i2} > \cdots > x_{im}$，非递增子序列。

总结

- 链、反链（独立集）
- 最大独立集、最长链
- 最长链长度 = 最小反链划分数
- Erdös-Szekeres引理

- **Mirsky's theorem定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，$\max\{|C|: C\text{是}P\text{上的链}\} = \min\{|\Pi|: \Pi\text{是}S\text{的反链划分}\}.$
- **Dilworth定理：** 给定有限偏序集 $P=(S,\preccurlyeq)$，$\max\{|\mathrm{A}|: A\text{是}P\text{上的反链}\} = \min\{|ß|: ß\text{是}S\text{的链划分}\}.$

- https://www.math.cmu.edu/~af1p/

- https://www.math.cmu.edu/~af1p/Teaching/Combinatorics/Slides/Posets.pdf