图论导引:

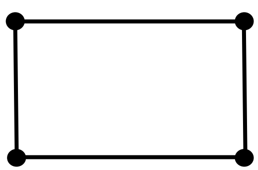
基本定义、特殊图

基本概念

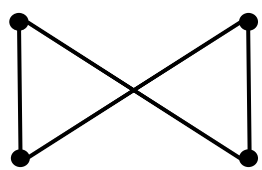
- **定义：** 图G是一个有序对(V,E)，其V中是一个集合被称为**顶点集**，E是一组由二元V元素组成的集合，称为**边集**，既 $E \subseteq \binom{V}{2}$。

Simple

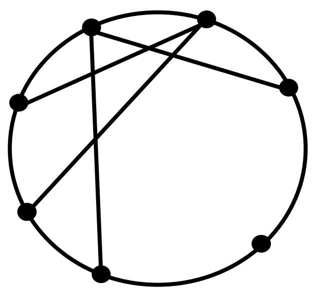
- 图G，为方便常用 $V(G), E(G)$ 来分别表示“G的顶点集”和“G的边集”。
- 画图(drawing)：



G_1

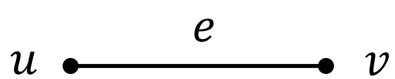


G_2



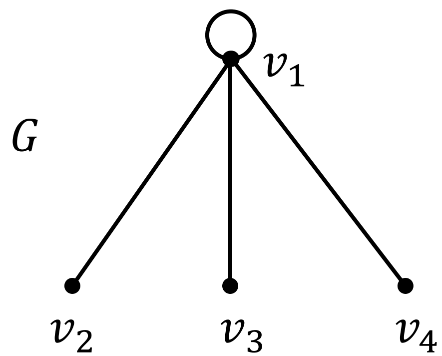
G_3

- 阶(Order)：图顶点的个数，即$|V|$。亦常用$|G|$表示。
- 若$e = \{u, v\} \in E$，则称点u和v在图G中是相邻的(adjacent)，或称u是v的邻居(neighbor)。此时亦称e和u, v相关联(incident)。
  - 显然，一条边与且只与两个顶点相关联。



- 常用$N(u)$表示与顶点u相邻的点集。

例：



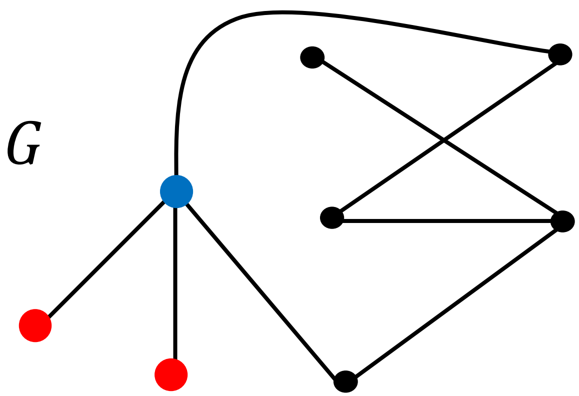
$|G| = 4,\ N(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

顶点的度

- 给定图$G=(V,E)$， $v\in \mathrm{V}$，定义该顶点在图G中的度(degree)为：

$$\deg_G(v)=|u:\{u,v\}\in G|=|N(v)|$$

- 一般地，$\delta(G)$表示图G的最小度，$\Delta(G)$表示最大度。
- 显然$\deg_G(v)\le|E|$。



$$\delta(G)=1$$
$$\Delta(G)=4$$

有向图和无向图

- 上面讨论的图统称为：无向图(undirected graph)。
- 如果边集E是二元*有序对*的集合，即$e \in E$都是形如$e = (u, v)$ 的形式，此时的图称为有向图(directed graph)。 u称为边e的起点，v称为边e的终点。

$$u \xrightarrow{e} v$$

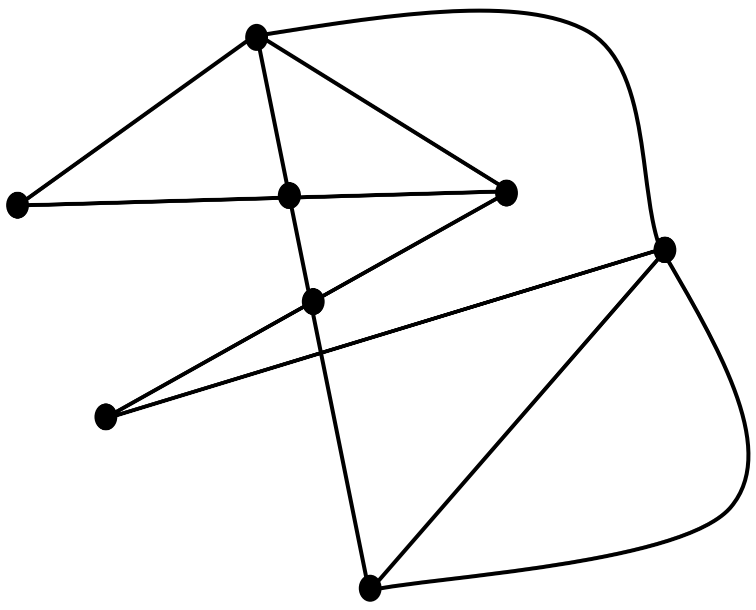
- 除显示声明外，均表示无向图。

- 很多现实问题可以抽象为图：

2015年上海地铁线路图（部分）

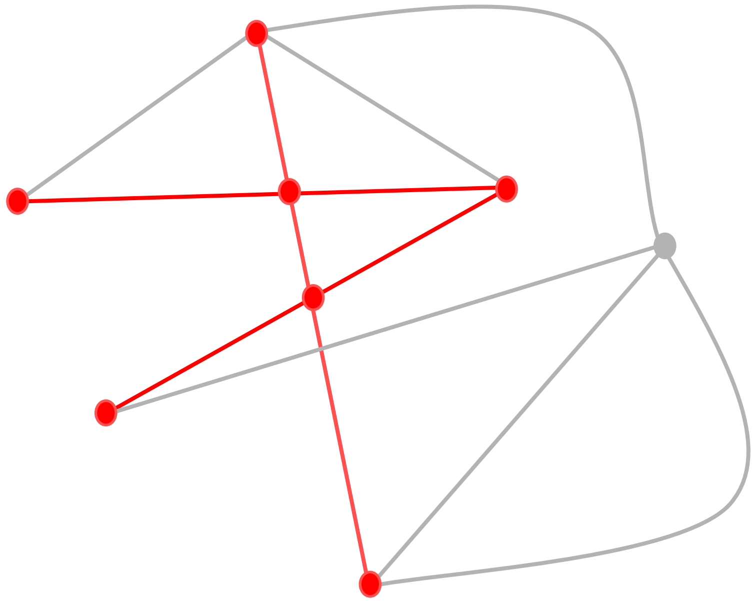
子图

定义： 已有图G和G'，若$V(G) \subseteq V(G')$且$E(G) \subseteq E(G')$，则称G是G'的子图(*subgraph*)。



子图

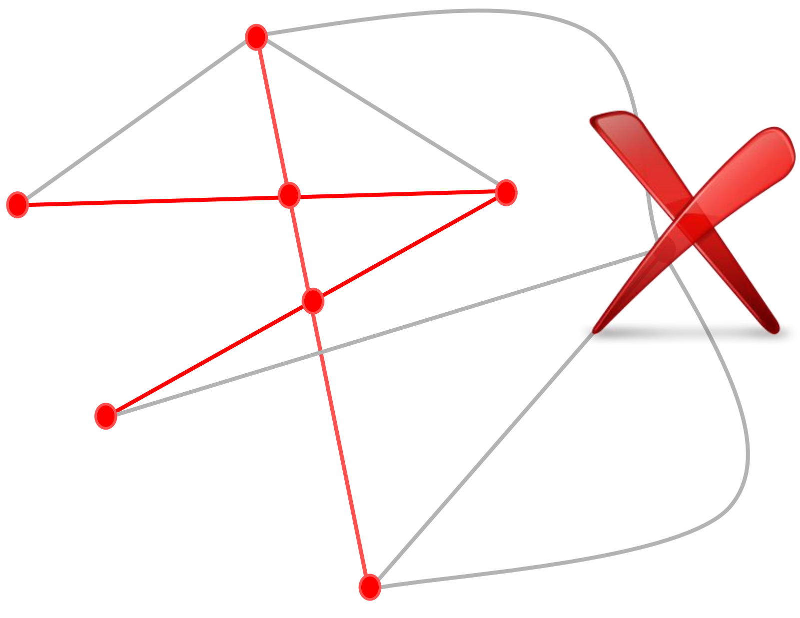
定义： 已有图G和G'，若$V(G) \subseteq V(G')$且$E(G) \subseteq E(G')$，则称G是G'的**子图** *(subgraph)*。



导出子图

定义： 已有图G和G'，若$V(G) \subseteq V(G')$且$E(G) \subseteq E(G')$，则称G是G'的子图(subgraph)。

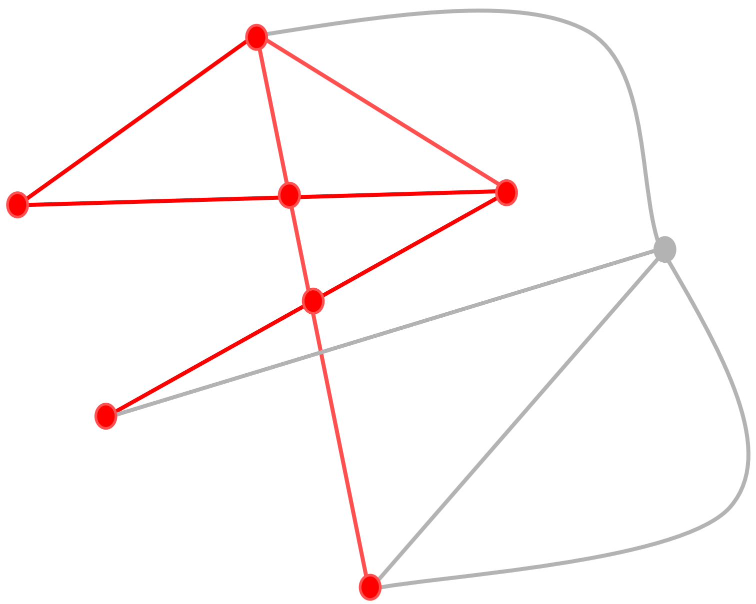
若还有$E(G) = E(G') \cap \binom{V(G)}{2}$则 G是G'的导出子图 (*induced subgraph*)



导出子图

定义： 已有图G和G'，若$V(G) \subseteq V(G')$且$E(G) \subseteq E(G')$，则称G是G'的**子图 (subgraph)**。

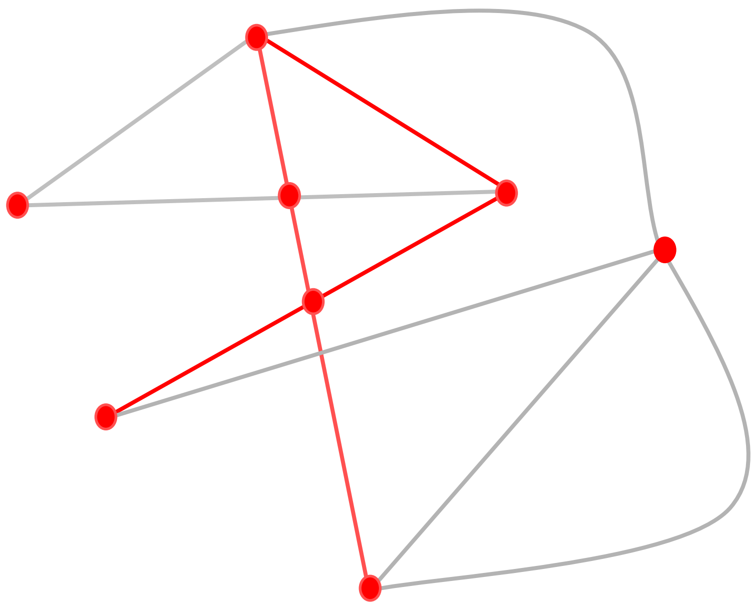
若还有$E(G) = E(G') \cap \binom{V(G)}{2}$则 G是G'的**导出子图** ***(induced subgraph)***



生成子图

定义： 已有图G和G'，若$V(G) \subseteq V(G')$且$E(G) \subseteq E(G')$，则称G是G'的子图 (*subgraph*) 。

若还有$V(G) = V(G')$ 则 G是G'的生成子图 (spanning *subgraph*)



图上的基本操作

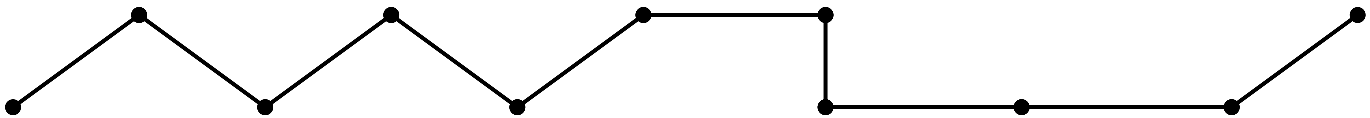
- $G+e_{ij}$：在G中增加边$e_{ij}=\{v_i,v_j\}$。
- $G-e_{ij}$：从G中删去边$e_{ij}=\{v_i,v_j\}$。
  - 反复操作，可得到图G的任意生成子图
- $G-\bar{E}$，其中$\bar{E}\subseteq E(G)$：从G中删去$\bar{E}$中的所有边。
- $G-v$：从G中删去顶点v及其关联的边。
  - 反复操作，可得到图G的任意导出子图。
- $G-\bar{V}$，其中$\bar{V}\subseteq V(G)$：从G中删去$\bar{V}$中的所有顶点及与这些顶点相关联的边。

图上的基本操作

- $G \cup \{e_{ij}\}$：在G中增加边$e_{ij} = \{v_i, v_j\}$。
- $G \setminus \{e_{ij}\}$：从G中删去边$e_{ij} = \{v_i, v_j\}$。
  – 反复操作，可得到图G的任意生成子图
- $G \setminus \bar{E}$，其中$\bar{E} \subseteq E(G)$：从G中删去$\bar{E}$中的所有边。
- $G \setminus \{v\}$：从G中删去顶点v及其关联的边。
  – 反复操作，可得到图G的任意导出子图。
- $G \setminus \bar{V}$，其中$\bar{V} \subseteq V(G)$：从G中删去$\bar{V}$中的所有顶点及与这些顶点相关联的边。

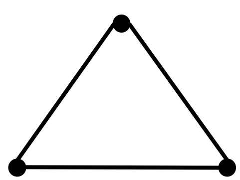
特殊图

- 路径图(Path P_n)
  - $V = \{0,1,\dots,n\}$,
  - $E = \{i-1, i\}: i = 1,2,\dots,n\}$.



P_{11}

- 环(Cycle C_n)
  - $V = \{1,2,\dots,n\}$,
  - $E = \{i, i+1\}: i = 1,2,\dots,n-1\} \cup \{\{1,n\}\}$.

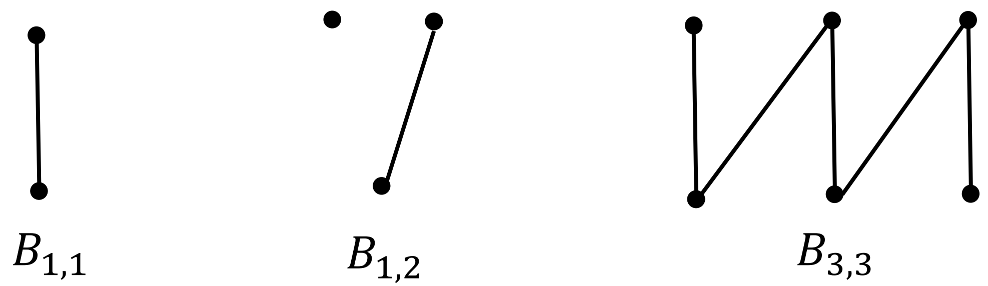


C_3

C_4

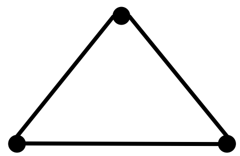
特殊图

- 二分图(Bipartite graph $B_{n,m}$)
  - $V = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\}$,
  - $E \subseteq \left\{\{u_i, v_j\}: i = 1,2, \ldots, j = 1,2, \ldots, m\right\}$.

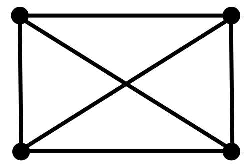


特殊图

- 完全图(Complete graph K_n)
  - $V=\{1,2,\dots,n\}$
  - $E=\binom{V}{2}$.



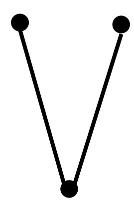
K_3



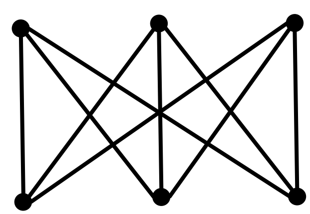
K_4

- 完全二分图(Complete bipartite graph $K_{n,m}$)
  - $V=\{u_1,\dots,u_n\}\cup\{v_1,\dots,v_m\}$,
  - $E=\left\{\{u_i,v_j\}: i=1,2,\dots,j=1,2,\dots,m\right\}$.

$K_{1,1}$

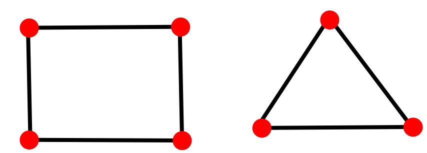


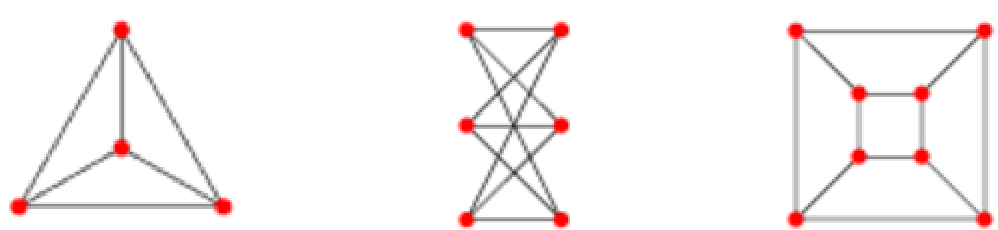
$K_{1,2}$



$K_{3,3}$

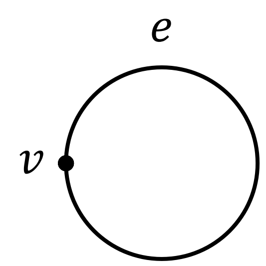
正则图

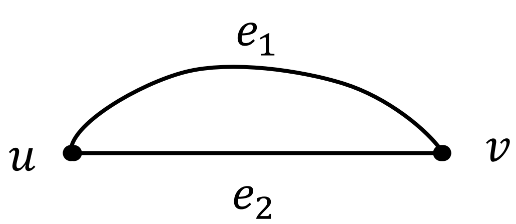
- 如果图中所有顶点的度数都是一个常值r，则称该图为r-正则图(r-regular graph)。
  - 0-正则图：空图 
  - 1-正则图：不相连的边（集） 
  - 2-正则图：不相交的环（集） 
  - 3-正则图：又称为立方图（cubic graph)



简单图

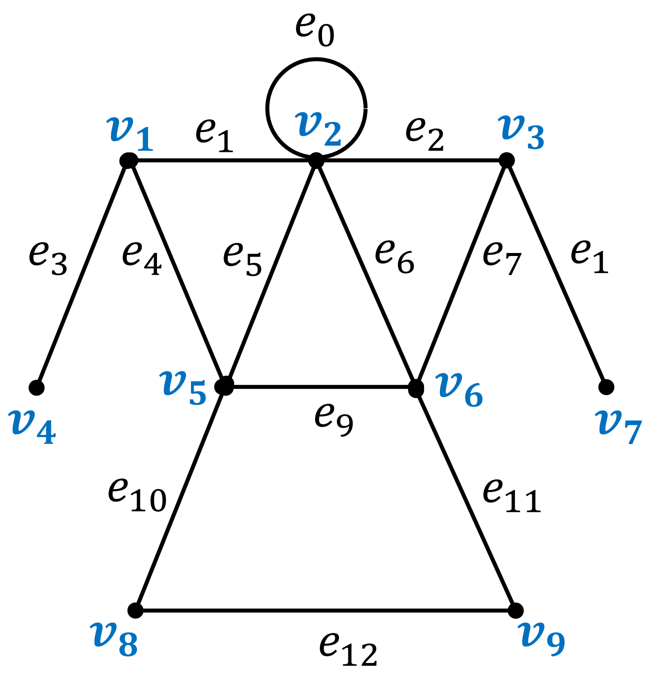
- 对无向图$G = (V, E)$
  - **自环(Loop)**：$e \in E$，如果$e = \{v, v\}$其中$v \in V$，则称e是一个自环。
  - **重边(Multiedge)**：$e_1, e_2 \in E$且$e_1 = e_2 = \{u, v\}$，其中$u, v \in V$，则称e_1, e_2是重边。



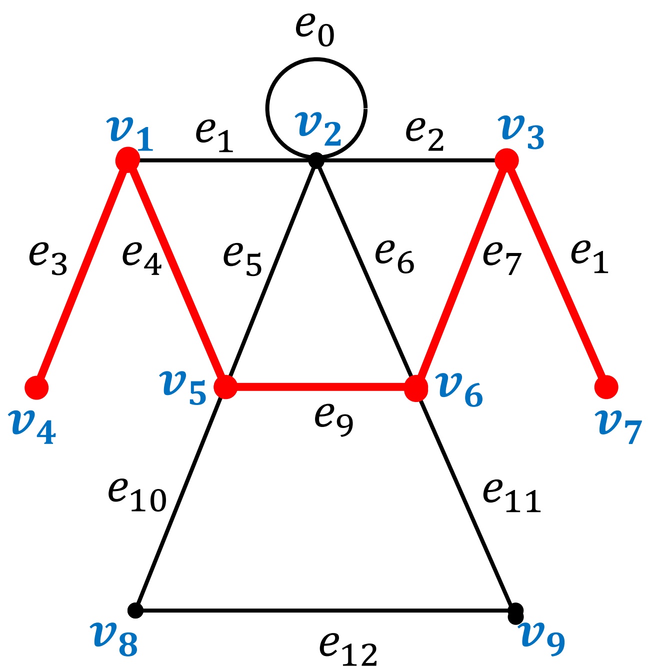


- **简单图(Simple graph)**：没有自环和重边的无向图被称为简单图。

路径与游走



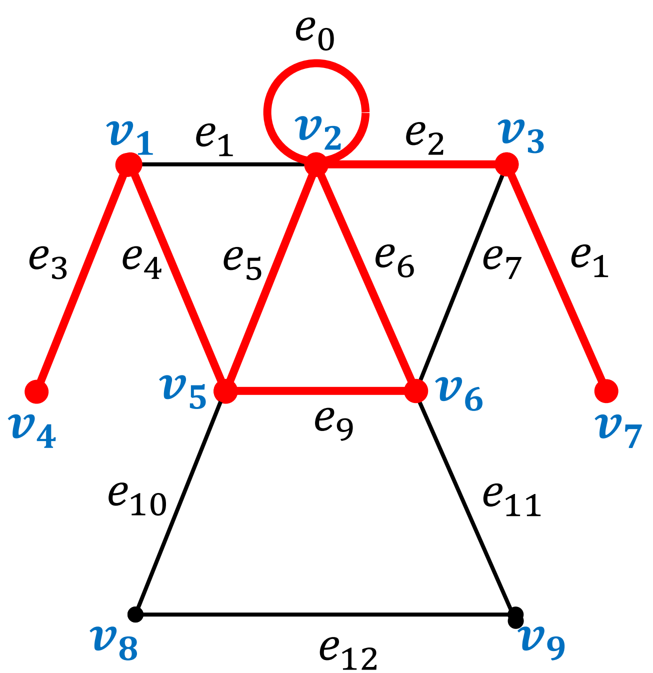
路径与游走



- 路径(Path)：
  - 不允许环，各顶点和边至多出现一次。

$(v_4, e_3, v_1, e_4, v_5, e_9, v_6, e_7, v_3, e_1, v_7)$

路径与游走



- 路径(Path)：
  - 不允许环，各顶点和边至多出现一次。

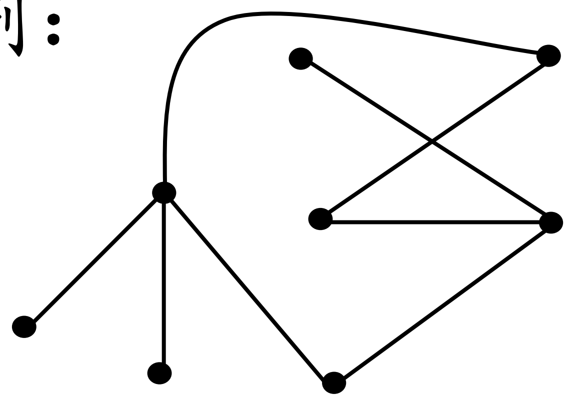
$(v_4, e_3, v_1, e_4, v_5, e_9, v_6, e_7, v_3, e_1, v_7)$

- 游走(Walk)：
  - 允许环，顶点和边可重复。

$(v_4, e_3, v_1, e_4, v_5, e_5, v_2, e_0, v_2, e_0, v_2, e_6, v_6, e_9, v_5, e_5, v_2, e_2, v_3, e_1, v_7)$

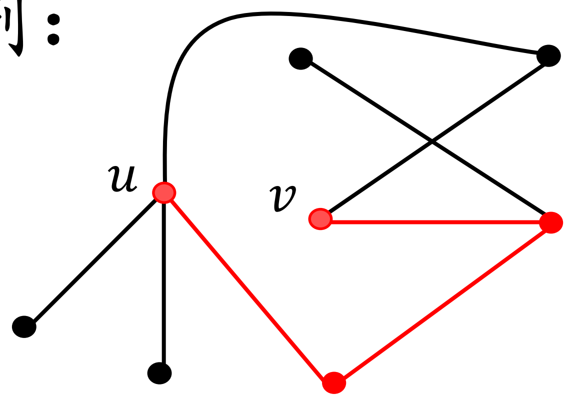
连通图

- 连通图(Connected graph): 如果图G上任意两点u, v之间都有一条路径，则称G是一个连通图。否则，称为非连通图(disconnected graph)。
- 例：



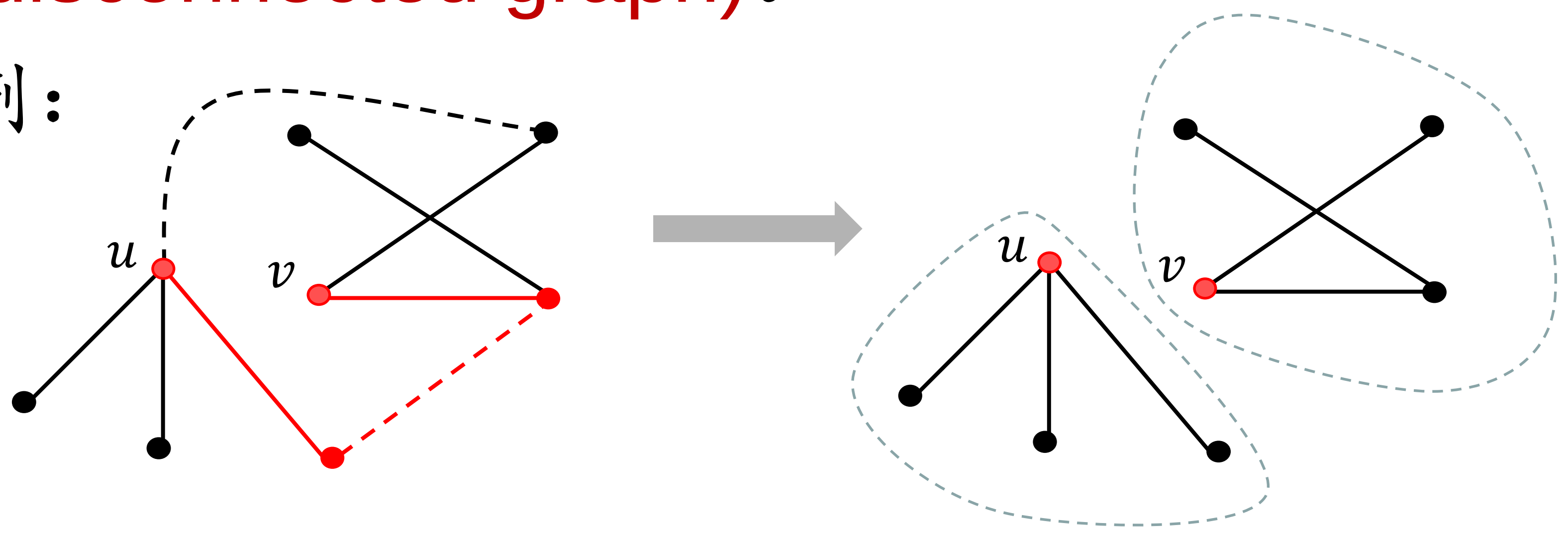
连通图

- 连通图(Connected graph): 如果图G上任意两点u, v之间都有一条路径，则称G是一个连通图。否则，称为非连通图(disconnected graph)。
- 例：



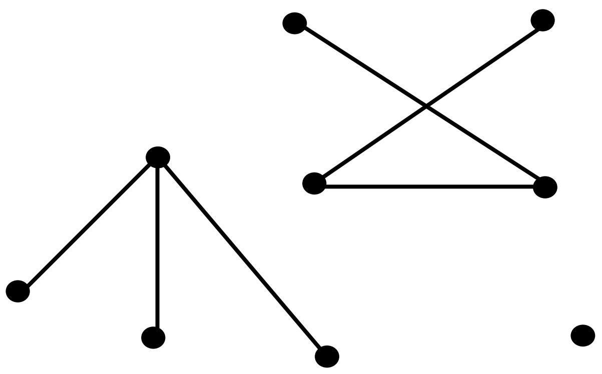
连通图

- 连通图(Connected graph): 如果图G上任意两点u, v之间都有一条路径，则称G是一个连通图。否则，称为非连通图(disconnected graph)。
- 例：



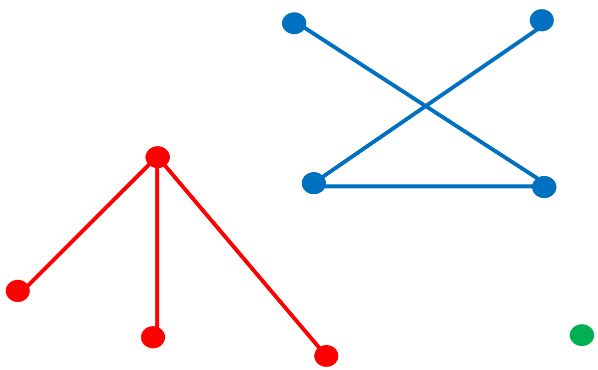
极大连通子图

- 对给定图G,定义G的**极大连通子图：**
  ①是原图的子图，
  ②是连通图，
  ③已经等于原图，或再扩大（增加顶点或边）则成为非连通图。



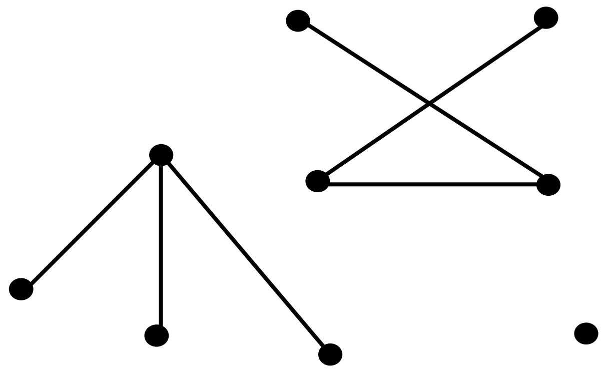
极大连通子图

- 对给定图G,定义G的**极大连通子图：**
①是原图的子图，
②是连通图，
③已经等于原图，或再扩大（增加顶点或边）则成为非连通图。



连通分支

- 连通分支(Component)：图$G=(V,E)$的极大连通子图也被称为图G的连通分支。
- 连通分支可能不唯一，图G的极大连通分支的个数用$Con(G)$表示。
- 例：

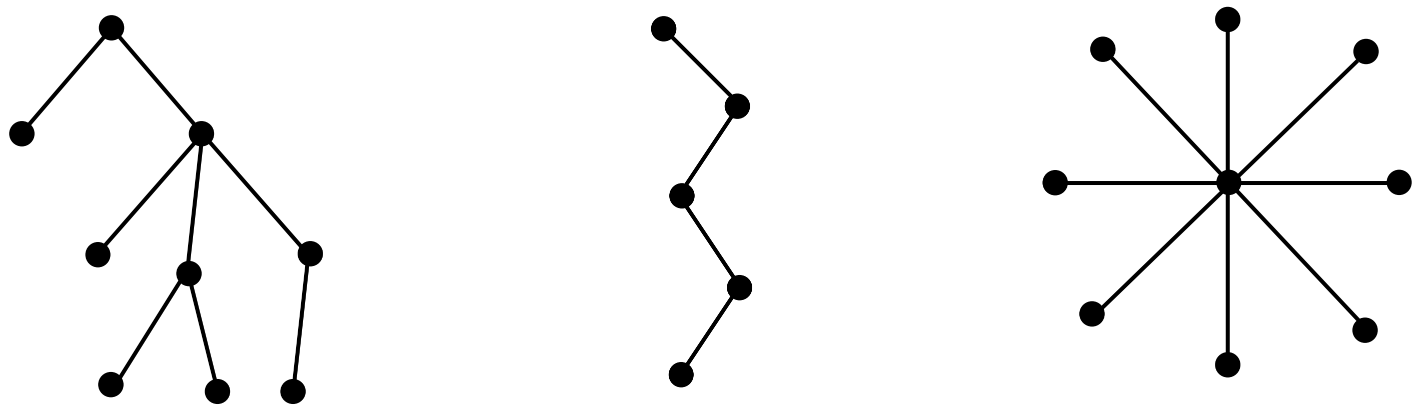


G

$$Con(G)=3$$

树

- 无环连通图被称为树(tree)



- 树是一类很重要的对象，在实际中有广泛应用，后面会专门讲到。

顶点的度

- 给定无向图$G=(V,E)$， $v\in \mathrm{V}$，定义该顶点在图G中的度(degree)为：
  $$\deg_G(v)=|u:\{u,v\}\in G|=|N(v)|$$
- 一般地，$\delta(G)$表示图G的最小度，$\Delta(G)$表示最大度。
- 易验证
  - $\deg_G(v)\le |E|$
  - $G=P_n$ 则 $1\le \deg_G(v)\le 2$
  - $G=C_n$ 则 $\deg_G(v)=2$
  - $G=K_n$ 则 $\deg_G(v)=n-1$

- **握手定理(*Handshaking theorem,*** Leonhard Euler 1736)：给定无向图$G = (V, E)$，以下等式成立

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

- 证明： 一条边与两个顶点相关联，在对$\deg_G(v)$做累加时，每条边被使用到两次。对边计数有类似推理。故等式成立。
- **推论：** 无向图中，度数为奇数的点一定是有偶数多个。
- 证明：