哥德尔完全性定理和不完全性定理

丁德成、许道云

南京大学数学系、贵州大学计算机科学与技术学院

历史上数学的三次危机

第一次危机：无理数的出现

公元前五世纪古希腊的数学有了很大的发展，毕达哥拉斯学派宣称“万物皆数”

(1) 毕达哥拉斯研究出一个法则：设m为奇数，则$m, (m^2-1)/2, (m^2+1)/2$组成了直角三角形。

(2) 他们发现可以用数学来解释音乐，将音乐归结为数与数之间的关系，因为弦所发出的声音取决于弦的长度，两根弦绷的一样紧，如果一根弦的长度是另一根的两倍，则两个音相差八度。

(3) 毕达哥拉斯学派认为宇宙是按数学方式设计的，自然界的形形色色的特性可以归结为数。1，2，3，4这四个数叫四象。自然是由点、线、面、立体这四元性组成。四象的四个数字之和为10，所以10为理想数

(4) 这就是说用数可以解释所有自然现象。在这里毕达哥拉斯所说的数是整数以及整数之比（有理数）。

不可公度数的发现

- 毕达哥拉斯学派的希帕苏斯发现正方形的对角线与其边是不可公度的，即，若将正方形的边长定为1，则无法用一个有理数来表示其对角线的长度。
- 不可公度数的发现无异于给天捣了一个窟窿。因为毕达哥拉斯学派声称“万物皆数”，而面对一个正方形的对角线的长度他们都无法解释。

演绎数学的兴起

- 由于“万物皆数‘’包括像毕达哥拉斯定理等数学定理都是由直觉得到的，所以人们认识到把数学建立在直觉上是不可靠的。
- 古希腊人改造了已有的粗糙的、经验的、有限的、零散的数学，建立了比较完整的数学体系。这种数学体系是建立在演绎的基础上的。
- 在这种演绎数学体系中，每一种数学的研究对象都给以明确的定义，再给出一些公理，这些公理都是经过严格挑选，无人怀疑其正确性。然后，从公理出发，用推理得出结论。
- 推理的方法有多种，如归纳、类比和演绎。最著名的是亚里士多德创立了一种演绎法—-三段论。

欧几里得的“几何原本”

- “几何原本”共有十三篇。“几何原本”首先给出了所有概念的定义，如我们大家熟悉的“点是没有部分的那种东西”，“线是没有宽度的”等等。然后是五个公设和五条公理。公理与公设的区别是公理适用于一切科学，而公设仅适合于几何。
- 欧氏几何的第五公设：

若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，

则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。

第二次数学危机

非欧几何的出现

人们始终对于“几何原本”中的第五公设不满意，觉得不象其它的公设和公理那样简洁、直观。开始人们想用“几何原本”中其它的公理和公设来推出它，从而去掉第五公设。但是始终无法做到这一点。

- 1826年罗巴切夫斯基研究了一种新型的几何学。这种几何学与欧氏几何的区别在于它假设

  通过不在直线ℓ上的一定点p,在ℓ与p

  的平面上，至少有两条直线不与ℓ 相交。

- 1854年德国数学家黎曼有提出了一种既非欧氏几何又非罗氏几何的全新的黎曼几何。在黎曼几何学中平行公理被代之为：

  通过不在直线ℓ上的一定点p

  在ℓ与p的平面上，没有一条直线不与ℓ相交。

算术的四则运算的合法性受到质疑

- 假使一个篮球运动员在第一场球赛中投篮12次，中了7次；第二球赛中投篮15次，中了8次。对于这个运动员在两场比赛中共投篮多少次和共投中多少次的问题我们可以用加法，即投篮12+15=27次，投中7+8=15次。该运动员的命中率在第一场是$\frac{7}{12}$，在第二场比赛中是$\frac{8}{15}$，但是在这两场比赛中他的平均命中率是多少呢？
- 有人以为用加法就可以了，即

$$\frac{7}{12}+\frac{8}{15}=\frac{7\times 5}{60}+\frac{8\times 4}{60}=\frac{67}{60}$$

- 我们用另一种分数加法规则，将分子与分子相加，分母与分母相加，即

$$\frac{7}{12}+\frac{8}{15}=\frac{7+8}{12+15}=\frac{5}{9}$$

微积分-泥足的巨人

17世纪，牛顿和莱布尼兹创立了微积分，这是一个十分伟大的发现。微积分的出现大大地推进了科学技术的发展，促进了工业革命。微积分学的基础是极限，而在当时数学家们却对极限的概念说不清楚。无穷大被说成是一个很大的数，却又不是一个具体的数，无穷小被说成是0又不是0的数。微积分的基础问题成了微积分的反对者的攻击对象。英国大主教贝克莱称微积分是“泥足的巨人”。

数学基础的建立

- 维尔斯特拉斯用$\varepsilon-\delta$ 语言将分析中最基本的概念无穷大、无穷小、极限和连续等概念解释清楚。
- 1874年康托尔建立了集合论。并且用集合的概念定义了自然数。
- 19世纪70年代，戴得金、康托尔和维尔斯特拉斯几乎同时给出了无理数的定义，从而建立了严密的实数理论。

短暂的晴空

到1900年为止，算术、代数、分析以及几何已经被严格化，许多数学家主张通过解析几何将所有几何建立在整数理论的基础上，因为整数理论已经用集合论严格化了。此时，大多数数学家都认为数学的可靠性问题已经解决了。所以在1900年的世界数学家大会上，庞加莱说："我们最终达到了绝对的严格吗？在数学发展前进的每一个阶段，我们的前人都坚信他们达到了这一点，如果他们被蒙蔽了，我们是不是也象他们一样被蒙蔽了？……但是今天在分析中，如果我们不厌其烦地严格的话，就会发现只有三段论或归结为纯数的直觉不可能欺骗我们的。今天我们可以宣布绝对的严格已经达到了"。

晴空霹雳-罗素悖论的出现

设是所有不是自己元素的集合组成的集合，即

$$A = \{X : X \notin X\}$$

所以，X是的元素的条件是X 不是X的元素，即

$$X \in X \Longleftrightarrow X \notin X$$

我们要问，A是不是A的元素呢？在上式中X是一个变量，我们将A代入X，就得到，

$$A \in A \Longleftrightarrow A \notin A$$

逻辑的三大主义

为了解决悖论问题，逻辑学家提出了许多办法形成了三大学派：

1. 逻辑主义
2. 直觉主义
3. 形式主义

逻辑主义

逻辑主义的代表人物是罗素，其思想来源可以追溯到莱布尼兹。其观点简言之，就是数学可以由逻辑推出来。在20世纪初，几乎所有数学家都认为逻辑法则是真理体系，因此如果将数学的基础建立在逻辑上，则数学也是真理体系。罗素和怀得海写了一本书“数学原理”，在这本书中，他们用逻辑给数学建立了基础，在逻辑的基础上建立了数学的公理体系。他们将集合分成类型，并用此避免了在集合论中产生数学悖论。但是罗素和怀得海在建立数学体系的过程中使用了约化公理、无穷公理和选择公理，对于这些公理许多数学家持有异义。

直觉主义

直觉主义的代表人物是克罗内尔、布劳威尔，直觉主义者认为只有整数是可靠的，其余都是可疑的。克罗内尔有句名言“上帝创造了整数，其它都是人的工作”。他们主张将所有数学建立在具有清楚意义的术语之上。其主要主张有：

1. 对于实数，克罗内尔主张要将实数理论建立在整数和可计算的实数的方法之上。
2. 数学必须是可构造的。
3. 反对排中律。

形式主义

形式主义的代表人物是希尔伯特。希尔伯特认为在逻辑发展的过程中已经用到了数，逻辑主义用逻辑来建立数学是循环论证。同时，希尔伯特认为直觉主义抛弃了大量经典数学的内容，而经典数学是我们最有价值的宝藏。希尔伯特认为排中律不能排除，他说禁止数学家使用排中律就像禁止天文学家使用望远镜和拳师使用拳头一样。为了保卫经典数学，1922年希尔伯特提出了重建数学的希尔伯特计划。

希尔伯特对建立数学基础的设想

- 古典数学(包括康托尔集合论)是“我们最有价值的宝藏”，要保留古典数学的成果。
- 坚持排中律。
- 有穷主义。希尔伯特的有穷方法是指不涉及实无穷的、直观上明显可靠的、能在有穷步骤内根据确定的机械的办法实施的，并可终结。

希尔伯特计划

1. 所有数学的形式化。意思是，所有数学应该用一种统一的严格形式化的语言，并且按照一套严格的规则来使用。
2. 完全性：我们必须证明以下命题：在形式化之后，数学里所有的真命题都可以根据上述规则被证明。
3. 相容性：我们必须证明：运用这一套形式化和它的规则，不可能推导出矛盾。
4. 可判定性：找到一个算法，可以机械化地判定数学陈述的对错。

希尔伯特计划的三部曲

1. 将所要讨论的古典数学理论（如数论）公理化，称之为T。把所得的公理化理论和所用的逻辑彻底地形式化,使得有内容的古典数学理论T（如数论）能表成一些形式符号和形式符号公式(它们是没有内容的)组成的系统，记为TF，
2. 由于研究形式理论TF时需要用到逻辑和数论,故希尔伯特建议采用有穷方法来建立一个逻辑系统和初等数论，以便与经典逻辑和普通数论相区别。这样建立起来的逻辑和数论，希尔伯特称之为元数学Tm。
3. 用元数学Tm来证明在形式理论TF中,不会有某个论断A与其否定$\neg A$同时可以推出，也就是证明形式理论TF的相容性。

希尔伯特计划的进展

- 波斯特在1921证明了命题演算的完全性
- 只含加法的算术的一致性
- 1929年哥德尔证明了一阶逻辑的完全性定理。

哥德尔完全性定理

- 1929年按照希尔伯特计划哥德尔证明了一阶逻辑的完全性定理。
- 非正式地说一个形式系统是完全的是指该系统中所有真的语句都可以被证明。它的逆命题是“所有可证的语句都是真的”（即可靠性）。哥德尔完全性定理指出一阶谓词演算的推理规则是“完全的”。
- 哥德尔完全性定理：
  (a) 如果$\Gamma \models \varphi$，则$\Gamma \vdash \varphi$。
  (b) 任何一致的公式集都是可满足的。

紧致性定理及其应用

由完全性定理很容易得到以下的紧致性定理

1. 如果$\Gamma \models \varphi$，则存在Γ 的某个有穷子集Γ_0 使得$\Gamma_0 \models \varphi$。
2. 如果Γ 的每个有穷子集Γ_0 都是可满足的，则Γ 也是可满足的。

紧致性定理的证明

- (1) $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow$ 对某个有穷集$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma_0 \models \varphi$
- (2) 若Γ不可满足，则由完全性定理，Γ不是一致的，则$\Gamma \vdash \neg\beta \wedge \beta$,则存在一个$\Gamma$的有穷子集$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$，使得$\Gamma_0 \vdash \neg\beta \wedge \beta$，所以$\Gamma_0$不是一致的，与假设矛盾。所以$\Gamma$是可满足的。

几个定义

- 标准算术模型: $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, 0, S, <, +, \cdot)$
- 非标准算术模型：与$\mathfrak{A}$初等等价但是不同构（可数与不可数）模型称为非标准算术模型。
- 结构$\mathfrak{A}$的理论：对任何一个结构$\mathfrak{A}$，我们称所有在$\mathfrak{A}$ 中成立的闭语句为的理论，记作Th $\mathfrak{A}$，即

$$\text{Th } \mathfrak{A} = \{\sigma : \mathfrak{A} \models \sigma\}。$$

非标准模型

- 首先扩展语言：添加一个新的常数符号c。令
$$\Sigma = \{0 < c, S0 < c, SS0 < c, \cdots\}。$$
- 我们验证任何一个$\Sigma \cup \mathrm{Th}\ \mathfrak{A}$ 的有穷子集Σ_0 都是可满足的：注意到Σ_0 最多只有有穷条Σ 中的语句，我们可以找一个充分大的自然数k，并在标准模型中添上c 的解释为k 即可。$\mathrm{Th}\ \mathfrak{A}$ 中的语句不牵扯到c，因此在标准模型中依然成立。
- 依照紧致性定理，$\Sigma \cup \mathrm{Th}\ \mathfrak{A}$ 也有一个模型。相对于标准算术模型，这模型被称为非标准算术模型。

- 1928年哥德尔证明了一阶逻辑的完全性定理，希尔伯特计划的实现似乎只有一步之遥。1931年哥德尔证明了哥德尔第一不完全性定理：
- 令$T \supseteq \mathrm{Q}$ 为一个可（递归）公理化的理论。如果T 是ω-相容的，则存在一个Π_1-闭语句σ 使得$T \nvdash \sigma$ 并且$T \nvdash \neg\sigma$。
- 这里的Q是罗宾逊算术，现在普遍采用皮亚诺算术。

什么是理论

- 理论是对逻辑蕴涵封闭的语句集合。
- 对一个结构类K，其理论ThK是

$$ThK = \{\sigma \mid \sigma \text{ 在}K\text{的每一个结构中都是真的}\}$$

- 设Σ是一个语句集合，Σ的推论集$Cn\Sigma = \{\sigma \mid \Sigma \models \sigma\}$
- 一个语句集合是理论当且仅当$T = CnT$。

什么是公理化的理论

- 一个理论T被称为是可公理化的当且仅当存在可判定的语句集合Σ使得$T = Cn\Sigma$。
- 公理化的理论是递归可枚举的。
- 完全的可公理化的理论是递归的。

什么是ω-相容的

- 令T 为语言系统L 上的一个理论。我们称T 是ω- 不相容的，如果存在一个公式 $\varphi(x)$ 使得 $T \vdash \exists x \varphi(x)$ 并且对所有$n \in \mathbb{N}$，都有$T \vdash \neg\varphi(\mathrm{n})$。
- 我们称T 是ω-相容的，如果T 不是ω-不相容的，也就是说，如果$T \vdash \exists x \varphi(x)$ 则对某一个$n \in \mathbb{N}$，我们有$T \nvdash \neg\varphi(\mathrm{n})$。

哥德尔-罗瑟不完全性定理

- 在 1936 发表的一篇文章中，罗瑟证明了哥德尔定理最初版本中关于 T 的 ω- 相容性的假设可以减弱成“T 是相容的”。从而完全摆脱了对语义的依赖，第一不完全性定理成为一个关于纯语法的命题。
- （哥德尔-罗瑟不完全性定理）令 $T \supseteq \mathsf{Q}$ 为一个可（递归）公理化的理论。如果 T 是相容的，则存在一个 Π_1-闭语句 σ 使得 $T \nvdash \sigma$ 并且 $T \nvdash \neg\sigma$。

希尔伯特计划的终结

- 哥德尔第一不完全性定理表明，如果一个形式理论足以容纳数论（皮亚诺算术），并且是不矛盾的，则该理论T必定是不完全的。因此希尔伯特计划是无法实现的。

哥德尔第二不完全性定理

- (1) 如果 T 是相容的，则 $\nvdash_T \mathsf{con}_\mathsf{T}$。
  (2) $\vdash_T \mathsf{con}_\mathsf{T} \to \neg\Box_\mathsf{T}\mathsf{con}_\mathsf{T}$。
- 这定理表明希望用形式化的方法证明数学的不矛盾性是不可能的。

在系统内构造一个语句G：“我在系统内是不可证明的”。如果在系统内能证明G，则二者互相矛盾；假设我们的系统是完全的，如果在系统内推不出G，则在系统内可以推出$\neg G$，则说明G是可以证明的，这也是一个矛盾。

语法算术化

- 我们讨论的系统是任何一个包含罗宾逊算术的系统，在这系统只有包含自然数的公式，而“可证”是一个语法概念，如何在算术系统中表示像“我是可证的”这样语法命题呢？哥德尔的方法是"语法算术化"。
- 所谓语法算术化就是用算术公式来表示语法命题。其基础为“哥德尔编码”技巧。

哥德尔编码

我们首先给每一个逻辑符号指派一个自然数。

符号ζ	$\forall$	0	S	$+$	$\cdot$	(	)	$\neg$	$\rightarrow$	$=$	v_0	v_1	$\ldots$
哥德尔数$\sharp\zeta$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	$\ldots$

- 接下来，我们指派给字符串$\xi = \zeta_0 \ldots \zeta_n$ 的哥德尔数为$\langle \sharp\zeta_0, \cdots, \sharp\zeta_n \rangle = p_0^{\sharp\zeta_0+1} \ldots p_n^{\sharp\zeta_n+1}$。

构造不可证的语句（1）

- 有了哥德尔编码每个包含算术系统的逻辑系统中符号、项、公式命题都有了一个哥德尔数。
- 每一个证明是一个有穷的符号序列，因此也对应一个哥德尔数。
- 证明序列的哥德尔数具有一定的特性，我们将用一个算术公式来表示这样的特性。从而用算术公式来表示类似“我是不可证的”这样的语句来证明定理。

构造不可证的语句（2）

- 我们要用算术公式来表示一个数b是一个证明序列的哥德尔编码，这是一个谓词$pf_T(b)$。$pf_T(b)$真当且仅当 b 是一个有穷序列的哥德尔数、$b \neq 1$ 并且$\forall k < \mathrm{lh}(b)[(b)_k \in \underline{X}$ 或 $(b)_k$ 是逻辑公理或 $(\exists i,j < k)(b)_i = \underline{(b)_j \rightarrow (b)_k}]$。
- 我们需要证明这个谓词是递归的，为此我们需要证明这个复杂谓词的每个组成部分是递归的，这是一个漫长的过程。
- 实际上，在哥德尔证明此定理的年代，尚没有递归函数的概念，那时只有原始递归函数的概念。

原始递归式的出现

- 十九世纪Dedekind(1888)就用归纳定义定义了加法、乘法和乘方。
- 1891年，Peano在建立Peano算术时给出了原始递归式。
- 1923年Skolem宣称所有初等数论函数均可用原始递归式定义。

原始递归函数

- 原始递归函数是满足下面条件的从自然数的有穷序列到自然数的最小函数类：
  1. 常函数$f(x) = c$，后继函数$f(x) = x + 1$，以及投射函数$f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)) = x_i$是原始递归函数。
  2. 如果f是k元原始递归函数，$g_1,...g_k$是m元原始递归函数，则

     $$h(x_1, ...x_m) = f(g_1(x_1, ...x_m), ..., g_k(x_1, ..., x_m))$$

     也是原始递归函数。
  3. 如果f是k元原始递归函数，g是$k + 2$元原始递归函数,则下列原始递归式定义的函数h也是原始递归函数。

     $$\begin{cases} h(u_1, ..., u_k, 0)) = f(u_1, ...u_k) \\ h(u_1, ...u_k, x + 1) = g(u_1, ..., u_k, x, f(u_1, ..., u_k, x)) \end{cases}$$

构造不可证的语句（3）

(1) $V = \{\sharp\alpha : \alpha$ 是一个<u>变元</u>$\}$ 是原始递归的。

(2) 集合 $\{t : t$ 是一个<u>项</u>$\}$ 是原始递归的。

(3) 集合 $\{a : a$ 是一个<u>原子公式</u>$\}$ 是原始递归的。

(4) 集合 $\{a : a$ 是一个<u>公式</u>$\}$ 是原始递归的。

(5) 存在一个原始递归函数 Sb 使得对任意项或公式 α，对任意变元 x 和任意项 t，我们有：

$$\mathrm{Sb}(\sharp\alpha, \sharp x, \sharp t) = \sharp\alpha_t^x\text{。}$$

构造不可证的语句（4）

(6) 函数 $f(n) = \sharp(S^n 0)$ 是原始递归的，因而，集合 $\{m : m$ 是一个数码$\}$ 是原始递归的。

(7) 定义自然数上的二元关系 "x 在 a 中自由出现" 如下：x 是一个变元，a 是一个项或公式，且x 在a 中自由出现。则关系 "x 在 a 中自由出现" 是原始递归的。

(8) 集合 $\{a : a$ 是一个闭语句$\}$ 是原始递归的。

(9) 定义自然数上的三元关系 "t 在 a 中可以替换 x"，如果 x 是一个变元，a 是一个公式，t 是一个项，且t 在a 中可以替换x。则关系 "t 在 a 中可以替换 x" 是原始递归的。

(10) 关系 "a 是 b 的一个全称概括" 是原始递归的。

构造不可证的语句（5）

(11) 集合 $\{a : a$ 是一个（一阶逻辑意义下的）形如 (A1)、(A2) 或 (A3) 的（命题逻辑）公理$\}$ 是原始递归的。

(12) 集合 $\{a : a$ 是形如 $\forall x\varphi \to \varphi^x_t$ 的公理，其中 t 在 φ 中可以替换 $x\}$ 是原始递归的。

(13) 集合 $\{a : a$ 是形如 $\forall x(\alpha \to \beta) \to \forall x\alpha \to \forall x\beta$ 的公理$\}$ 是原始递归的。

(14) 集合 $\{a : a$ 是形如 $\varphi \to \forall x\varphi$ 的公理，其中 x 不在 a 中自由出现$\}$ 是原始递归的。

(15) 集合 $\{a : a$ 是形如 $x \approx x$ 的公理$\}$ 是原始递归的。

构造不可证的语句（5）

(16) 集合 $\{a : a$ 是形如 $\underline{x \approx y \to \varphi \to \varphi'}$ 的公理 其中φ 是一个原子公式且 φ' 是将 φ 中的若干个 x 替换成 y 而得到的$\}$ 是原始递归的。

(17) 集合 $\{a : a$ 是一条逻辑公理$\}$ 是原始递归的。

(18) 令 T 为一个被集合 $X \subseteq T$ 所公理化的理论。根据公理化的定义，X 必须是可判定的，即集合 $\underline{X}$ 是递归的。则谓词“b 是一个 T 上的一个证明序列”是递归的。

(19) 令T 同前。定义谓词 $\mathrm{bew}_T(b, a)$ 为“b 是一个 T 上的一个证明序列 且 $b_{\mathrm{lh}(b)-1} = a$”。则 $\mathrm{bew}_T(b, a)$ 是递归的。（“Beweis”是“证明”的德语。）

(20) 令T 同前。定义谓词 $\mathrm{bwb}_T(a)$ 为 $\exists b\, \mathrm{bew}_T(b, a)$。则 $\mathrm{bwb}_T(a)$ 是递归可枚举的。在一般情况下是不递归的。（“Beweisbar”是“可证”的德语。）

不动点引理

- 给定一个公式$\beta(v_1)$ 其中只有变元v_1 自由出现，我们可以能行地找到一个闭语句σ 使得：

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(S^{\sharp\sigma}0)。$$

- 直观上看，σ 说的是“β 对我的编码（或镜像）成立”或简单地说“β 对我成立”。人们经常使用$\ulcorner\sigma\urcorner$ 来表示L_{ar} 中的项$S^{\sharp\sigma}0$，即，$\sharp\sigma$ 的数码。从而不动点引理的结论可以表达得更有暗示性：$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\ulcorner\sigma\urcorner)$。

不动点引理证明(1)

- 令$\theta(v_1, v_2, v_3)$ 表示递归函数

$$\langle \sharp\alpha, n\rangle \mapsto \sharp\ \alpha(\mathsf{n})$$

的一个公式，其中α 为一个仅含一个自由变元的公式。

- 所以

$$Q \vdash \forall v_3\ [\theta(\ulcorner\alpha\urcorner, \mathsf{n}, v_3) \leftrightarrow v_3 \approx \ulcorner\alpha(\mathsf{n})\urcorner] \tag{1}$$

- 考察公式$\tau(v_1)$:

$$\tau(v_1) := \forall v_3\ [\theta(v_1, v_1, v_3) \rightarrow \beta(v_3)]。$$

不动点引理证明(2)

- 令q 为公式$\tau(v_1)$ 的哥德尔编码。再令闭语句σ 为

$$\sigma := \forall v_3(\theta(\mathsf{q}, \mathsf{q}, v_3) \to \beta(v_3))。 \tag{2}$$

- 我们验证

$$\mathsf{Q} \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\ulcorner \sigma \urcorner)。 \tag{3}$$

- 根据θ 的选择，如果我们在(1)式中将α 和n 分别用τ 和$q = \sharp\tau$ 代入，我们就得到

$$\mathsf{Q} \vdash \forall v_3[\theta(\mathsf{q}, \mathsf{q}, v_3) \leftrightarrow v_3 \approx \ulcorner \sigma \urcorner]。 \tag{4}$$

不动点引理证明(3)

- 先看(3) 式中从左向右"$\Rightarrow$"的方向：由(2) 式，我们有$\sigma \vdash \theta(\mathrm{q}, \mathrm{q}, \ulcorner\sigma\urcorner) \to \beta(\ulcorner\sigma\urcorner)$。根据(4)，$\mathrm{Q} \vdash \theta(\mathrm{q}, \mathrm{q}, \ulcorner\sigma\urcorner)$。所以$\mathrm{Q} \cup \{\sigma\} \vdash \beta(\ulcorner\sigma\urcorner)$。
- (3) 式中从右向左"$\Leftarrow$"的方向：根据(4)，$\beta(\ulcorner\sigma\urcorner) \to [\forall v_3(\theta(\mathrm{q}, \mathrm{q}, v_3) \to \beta(v_3))]$，原因是只有唯一的那样的$v_3$，也就是$\ulcorner\sigma\urcorner$。而方括号中的公式恰恰是$\sigma$，我们就得到了(3) 式。

哥德尔第一不完全性定理的证明

- 令$bew(y,x)$ 为T 中表示递归关系bew_T的公式，并且定义$bwb(x)$为$\exists y bew(y,x)$。再令σ 为公式$\neg bwb(x)$的不动点。我们有：
$$T \vdash [\sigma \leftrightarrow \neg bwb(\ulcorner \sigma \urcorner)]。\quad (*)$$
- 如果$T \vdash \sigma$，则$T \vdash \mathrm{bwb}(\ulcorner \sigma \urcorner)$。再根据(*)，$T \vdash \neg bwb(\ulcorner \sigma \urcorner)$，这与 T 的相容性矛盾。所以，$T \nvdash \sigma$。
- 假设$T \nvdash \sigma$,根据可表示性定义，我们有对任意的$n \in \mathbb{N}$，$T \vdash \neg bew(\mathrm{n}, \ulcorner \sigma \urcorner)$。由 T 的 ω-相容性，$T \nvdash \exists y bew(y, \ulcorner \sigma \urcorner)$，即，$T \nvdash bwb(\ulcorner \sigma \urcorner)$。再次利用(*)，我们有$T \nvdash \neg\sigma$。

哥德尔第二不完全性定理的证明

- 用哥德尔第一不完全性定理的证明思路可以用于证明哥德尔第二不完全性定理。
- 哥德尔第二不完全性定理主要是要证明下面的语句

$$\vdash_T \mathsf{con}_T \to \neg \mathsf{bwb}_T(\mathsf{con}_T)。$$

- 此处，con_T是$\neg bwb_T(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner)$

自然的不可判定语句

- 根岑构造了一个关于序数的不可判定例子。
- 在1977 年，帕里斯和哈灵顿证明了有穷拉姆齐定理的下述版本在$\mathbb{N}$ 中成立却不是PA 可证的。
- 对任意正整数n, k, m，我们可以找到N 使得：如果我们把集合$S = \{1, 2, 3, \cdots, N\}$ 的每个恰好有n 个元素的子集染成k 种颜色中的一种，那么我们就可以找到S 的一个至少含有m 个元素的子集Y，使得Y 的每个含有恰好n 个元素的子集都被染成同一种颜色，并且Y 中元素的个数不小于Y 中的最小元。

哥德尔不完全性定理对其它科学的影响

哥德尔不完全性定理的影响远远超出了数学的范畴。它不仅使数学、逻辑学发生革命性的变化，引发了许多富有挑战性的问题，而且还涉及哲学、语言学和计算机科学，甚至宇宙学。

在不同领域中的应用，得到不同的完全性定理。比如：

- 信息论：在形式算术系统T中，存在一个数C_T（它作为T系统中公理的信息内容或熵。即，要描述或处理这些公理需要的最小信息量），使得形如
$$K(w) > C_T$$
的命题在T中是不可证的。这里$K(w)$表示串w的科尔莫葛罗夫(Kolmogorov)复杂性,它的定义基于Turing机下对串（信息）的最小描述概念。
- 宇宙学：2002年，著名宇宙学家霍金在北京举行的国际弦理论会议上发表了题为《哥德尔与M理论》的报告，认为建立一个单一的描述宇宙的大统一理论是不太可能的，这一推测正是基于哥德尔不完全性定理。

哥德尔不完全性定理对其它科学的影响

哥德尔不完全性定理的影响远远超出了数学的范畴。它不仅使数学、逻辑学发生革命性的变化，引发了许多富有挑战性的问题，而且还涉及哲学、语言学和计算机科学，甚至宇宙学。

在不同领域中的应用，得到不同的完全性定理。比如：

- 信息论：在形式算术系统T中，存在一个数C_T（它作为T系统中公理的信息内容或熵。即，要描述或处理这些公理需要的最小信息量），使得形如
$$K(w) > C_T$$
的命题在T中是不可证的。这里$K(w)$表示串w的科尔莫葛罗夫(Kolmogorov)复杂性,它的定义基于Turing机下对串（信息）的最小描述概念。
- 宇宙学：2002年，著名宇宙学家霍金在北京举行的国际弦理论会议上发表了题为《哥德尔与M理论》的报告，认为建立一个单一的描述宇宙的大统一理论是不太可能的，这一推测正是基于哥德尔不完全性定理。

后希尔伯特计划时代

- 在哥德尔不完全性定理出现后，希尔伯特开始是愤怒，接着是失望，但是他很快地就平静下来了。他对人类的推理和理解能力具有无穷的信心。希尔伯特派放宽了对证明方法的限制，1936年根岑使用了超限归纳法证明了算术和分析中一些受限部分的相容性。
- 既然对全部数学真理进行形式化是不可能的，数学家们只好退而求其次，尝试形式化他们熟悉的数学。法国的布尔巴基学派在这方面似乎走得最远。这是在巴黎高师的一帮数学家，继承了希尔伯特的一些理念，目标是将所有已知的数学在集合论的坚实基础上重建。
- 形式化的方法今天在计算机科学中得到了广泛的应用。

数学地可知多少？

数学地可知性就是可证性

施瓦茨(Schwartz)曾经总结过三句话：

- 希尔伯特(Hilbert) 认为一切事物是数学地可知的。
- 哥德尔(Gödel) 认为某些事物不是数学地可知的。（由Gödel不完全定理）
- 切顿(Chaitin) 认为只有一小部分事物是数学地可知的。（Chaitin将Gödel不完全定理应用于信息论，得到前述$K(w) > C_T$的不可证性）

数学地可知多少？

数学地可知性就是可证性

施瓦茨(Schwartz)曾经总结过三句话：

- 希尔伯特(Hilbert) 认为一切事物是数学地可知的。
- 哥德尔(Gödel) 认为某些事物不是数学地可知的。（由Gödel不完全定理）
- 切顿(Chaitin) 认为只有一小部分事物是数学地可知的。（Chaitin将Gödel不完全定理应用于信息论，得到前述$K(w) > C_T$的不可证性）

数学地可知多少？

数学地可知性就是可证性

施瓦茨(Schwartz)曾经总结过三句话：

- 希尔伯特(Hilbert) 认为一切事物是数学地可知的。
- 哥德尔(Gödel) 认为某些事物不是数学地可知的。
  （由Gödel不完全定理）
- 切顿(Chaitin) 认为只有一小部分事物是数学地可知的。
  （Chaitin将Gödel不完全定理应用于信息论，得到前述$K(w) > C_T$的不可证性）

关于可计算性定义的讨论

- 我们看到在哥德尔不完全性定理的证明中递归函数起了决定性的作用，实际上在原始的哥德尔的证明中这些函数虽被称为递归函数，但是按照现在的定义这些函数是原始递归函数。
- 在哥德尔不完全性定理出现后人们就考虑一个问题：可计算函数是不是就是原始递归函数？

Ackermann函数

- 1928年Ackermann构造了函数，人称Ackermann函数，它不是原始递归的，但是它是可计算的，存在一个计算它的方法。

$$
\begin{aligned}
f(0,0,y) &= y \\
f(0,x+1,y) &= f(0,x,y)+1 \\
f(1,0,y) &= 0 \\
f(z+2,0,y) &= 1 \\
f(z+1,x+1,y) &= f(z,f(z+1,x,y),y)
\end{aligned}
$$

什么是可计算函数?

- 原始递归函数的特点是每个原始递归函数都有一个算法。一个函数是可计算的是指有一个计算它的算法。
- 算法的概念古而有之，在希腊就有了欧几里得的最大公约数的算法。古希腊人就知道一元二次方程的算法。到了十六世纪欧洲人又找到了一元三次方程和四次方程的解法。当时人们觉得五次、六次甚至更高次数的方程都有解法，只是我们暂时没有找到他而已。1924年Abel证明了五次以上方程求根公式不存在。Abel的结果给了人们一个启示：有些函数是没有算法的。
- 那么什么样的函数是有算法，即可计算的呢?
- 人们首先想到是不是所有可计算的函数都是原始递归的。

可计算性的定义

- 原始递归函数是满足下面条件的从自然数的有穷序列到自然数的最小函数类：
  1. Herbrand-Goedel 的一般递归函数(1934)
  2. Church的λ可定义函数(1930)
  3. 哥德尔–赫尔伯朗–克尼列的一般递归函数(1935)
  4. 图林的图林机可计算函数(1936)

Church论题

- 1930年Church提出了λ可定义函数。1934年Church向Goedel提出“能行可计算函数就是λ可定义的函数”。Goedel对他的提议的回答是“完全不满意”。
- 1935年Church在美国数学会的年会上的报告中提出“能行可计算函数就是Herbrand-Goedel的一般递归函数”这就是著名的Church论题。
- Turing论题：1936年Turing在提出了图灵机模型后提出了Turing论题“如果一个函数是非形式的（直觉上的）可计算的，那它就是图灵机可计算的”。
- 1937年，图灵在他的“可计算性与 λ 可定义性”一文中证明了图灵机可计算函数与 λ 可定义函数是等价的，从而拓广了丘奇论点，得出：算法(能行)可计算函数等同于一般递归函数或 λ 可定义函数或图灵机可计算函数。这就是“丘奇-图灵论点”，

图灵机构想的来源

- 图灵机的产生是图灵对自欧几里得二千年以来人类对于算法研究的总结和发展。他全面分析了人的计算过程，把计算归结为最简单、最基本、最确定的操作动作，从而用一种简单的方法来描述那种直观上具有机械性的基本计算程序，使任何机械(能行)的程序都可以归约为这些动作。这种简单的方法是以一个抽象自动机概念为基础的，其结果是：算法可计算函数就是这种自动机能计算的函数.

Leibniz的梦

- 莱布尼说计算机应当是所有从事计算的人们所想要的，这些人可能是金融部门的经理、商人、外科医生、地理学家、航海家和天文学家……但就局限于科学方面的用途而言，可以用计算机来订正几何和天文学中的各种表，构造新的表……扩充平方表、立方表以及其它次幂的表……这样可使得天文学家不用耐着性子进行烦琐的计算……大量杰出的人才再也用不着花费大量的时间去从事计算。
- 一切推理的正确性将化归于计算，除了事实的错误外，所有错误将只由于计算的失误。我们要造成这样的一个结果，使得所有推理错误只成为计算的失误，这样当争论发生的时候，两位哲学家同计算家一样，用不着辩论，只要把笔拿在手中，并且在一个计算器面前坐下，两个人互相看一下说：让我们来算一下吧。

古代的计算机

- 17世纪E. Parscal 为了帮助他父亲完成计算任务, 研究并造出了第一台计算机—加法机。
- Leibniz做出了第一台能做加、减、乘除四则运算的计算机。
- 19世纪Babbage和著名诗人拜伦的女儿Ada研制了一种计算机，这种计算机是程序控制的。

通用图灵机

- 通用图灵机U是这样一种机器，给U输入一个数对$< t, x >$，U可以找到以t为下标的图灵机M，然后模仿M输入x后的计算过程。
- 现代计算机与古代计算机的根本区别在于现代计算机是程序内存的。而程序内存的理论基础是通用图灵机。

图灵机和现代计算机

- von Neumann设计制作的EDVAC是世界上第一台程序内存的自动计算机.程序内存的计算机首先由von Neumann做成，这是国际公认的.他的设计思想称为"von Neumann设计思想";这种机器的程序设计被称为"von Neumann程序设计".这种设计的本质特点是程序内存。由于有了程序内存，使计算机具备了"思维的性质“，开辟了人工智能的科学研究方向，开始了信息时代。
- von Neumann生前助手S. Frankel于1972年2月11日给Randell的复信中说，von Neumann明确地告诉人们相Frankel本人，这种程序内存的计算机的设计思想属于Turing，而他自己的贡献只是把Turing的基本思想做了高度创造性的发展工作，在摩尔学院把具体的程序内存的计算机做出来。