第十五周作业-solution

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2023 年 12 月 27 日

1. (教材习题 9.20) 证明 $NP = P$ 当且仅当对于某个 NP 完全问题 Π，$\Pi \in P$。

解答. 我们已经有 $P \subseteq NP$，因此只需要证明 $NP \subseteq P$，即证明任何一个 NP 问题 Π' 都有确定的多项式时间算法。注意到 $\Pi \in P$，我们构建如下的算法：

- 由于 Π 是 NP 完全问题，所以 $\Pi' \propto_{poly} \Pi$，即存在一个多项式时间的归约算法 R，使得对于任何一个 Π' 的实例 I'，$R(I')$ 是 Π 的一个实例 I，并且 $R(I')$ 的规模为 $O(|I'|^k)$，k 是一个常数。
- 调用 Π' 的多项式时间算法，解决 $R(I')$，得到 I' 的结果。

上述是一个多项式时间的算法，因此 $NP \subseteq P$，从而 $NP = P$。 □

2. 课上已经说过，团问题是 NP 完全的，现在我们考虑其一个子问题，即顶点度数不超过 3 的团问题，我们称其为 $Clique{-}3$：

(1) 证明 $Clique{-}3$ 是 NP 问题?

(2) 请指出下列证明 $Clique{-}3$ 是 NP 完全问题的错误之处：

我们知道一般的团问题是 NP-完全的，因此仅需要找打一个由 $Clique{-}3$ 到团问题的归约。给定一个顶点度数不超过 3 的图 G 和参数 k，归约保持该图和参数不变；显然归约的输出是团问题的一个可能输入。此外，两个问题的解相同。这样就证明了归约的正确性，从而 $Clique{-}3$ 是 NP-完全的。

(3) 尝试给出一个对 $Clique{-}3$ 问题的算法，它是多项式的么?

解答.

(1) 给定 3 个点，我们可以在多项式时间内验证其是否为一个团，因此 $Clique{-}3$ 是 NP 问题。

(2) 该证明的错误之处在于归约方向反了，将此问题归约到一个 NP 完全问题并不能说明该问题是 NP 完全的。

(3) 我们的算法就是枚举所有的可能性并验证。注意到一次验证是常数时间，同时枚举的可能性为 $\binom{n}{4} = O(n^4)$(因为至多存在 4 个点的团集)，因此该算法是多项式的。

□

3. (独立集问题 (Independent Set)) 图的独立集指的是顶点的一个子集 V'，满足图中的每条边至多于 V' 的一个点相关联。独立集问题是指给定一个图 G 和参数 k，判断是否存在一个独立集 V'，使得 $|V'| \geq k$。证明独立集问题是 NP 完全的。

(Hint: 尝试用团问题去归约。)

解答. 首先注意到独立集的等价定义为 V' 中不存在边。

- 注意到给定一个子集，我们可以在 $O(|V||E|)$ 的时间内验证其是否是独立集，因此其是 NP 问题。
- 我们将团问题归约到独立集问题，给定一个图 G 和参数 k，我们构造相应的图 G' 为 G 的补图，$k' = k$，我们有如下事实：
  - G 有一个 k 个顶点的团当且仅当 G' 有一个 k 个顶点的独立集。

  这是因为如果 G 有一个 k 个顶点的团, 其顶点为 $v_1, \ldots, v_k$，则相应的这 k 个点即为 G' 的独立集，反之同理。这显然是一个多项式时间归约，从而我们完成了证明。

□