

第八周作业-solution

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2023 年 12 月 24 日

1. (教材习题 8.8) 设 $G = (V, E)$ 是一个无向图。图的着色是一个对 G 中顶点的颜色指派问题, 使没有两个相邻顶点具有相同的颜色, 着色问题是决定对图 G 着色所需要的最少颜色数。考虑下面的贪心方法, 其试图解决着色问题。

- 令颜色为 $1, 2, 3, \dots$
- 尽可能的用颜色 1 对顶点着色。
- 在剩下的顶点中尽可能的用颜色 2 对顶点着色。
- 再在剩下的顶点中尽可能的用颜色 3 对顶点着色, 以此类推, 直到所有的顶点都被染色。

请证明, 上述贪心算法并不是总能得到最少的着色方案。

解答. 这里尽可能我们理解为每次为尽可能多的顶点上色, 我们考虑如下的例子:

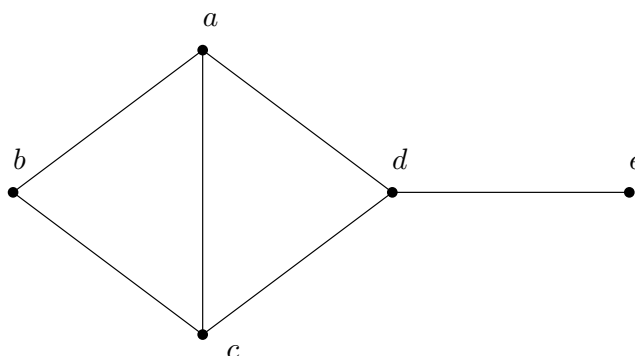


图 1: 着色问题的反例

该例子中, 最少所需颜色为 3; 但是按照上述贪心算法, 我们可能会得到如下的着色方案:

- b, e 使用颜色 1, 剩余每个顶点使用一个不一样的颜色, 共需要 4 种颜色。

□

2. (教材习题 8.27) 如果图含有负权重, $Prim$ 算法是否能给出正确的最小生成树? 请证明你的结论。

解答. $Prim$ 算法可以给出正确的最小生成树, 不受负权重的影响。事实上, 假设 n 个顶点的图 G 存在负权重, 令 c 是权重最小的边的权重, 那么我们可以构造一个新的图, 顶点和边与原图相同, 但是每条边的权重都加上 $-c + 1$, 那么这个新图 G' 的所有权重都是正的, 并且 G' 的最小生成树的权重正好比 G 的最小生成树的权重多 $(n - 1)(1 - c)$, 即 G' 的最小生成树恰好也是 G 的最小生成树。因此, 我们可以在 G' 上运行 $Prim$ 算法, 得到的最小生成树正好是 G 的最小生成树, 即负权重不影响 $Prim$ 算法的正确性。 □

3. (教材习题 8.31) 用算法 $Huffman$ 找出字符 a, b, c, d, e 和 f 的最优编码。它们在所给的文本中出现的频度分别为: 7, 5, 3, 2, 12, 9。

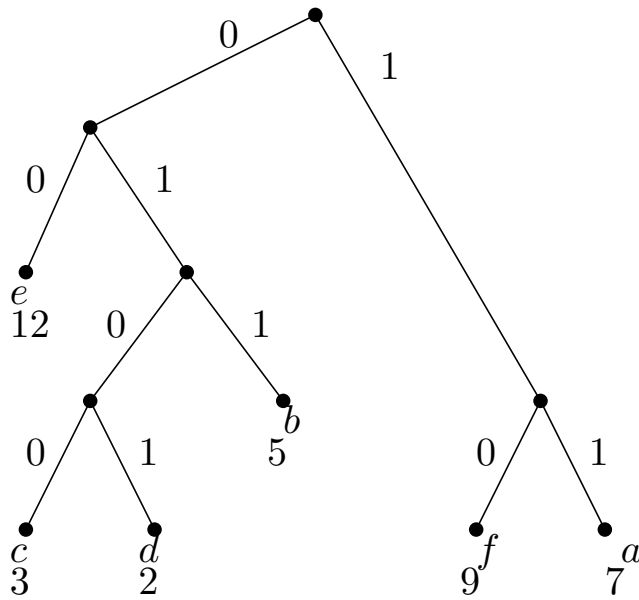


图 2: Huffman 树

解答. 运行 *Huffman* 算法, 得到的 *Huffman* 树如下: 从而我们有相应的最优编码为:

- $a: 11, b: 011, c: 0100, d: 0101, e: 00, f: 10$

我们需要注意的是, 编码并不一定是唯一的, 但是编码的平均长度是一定的。 □

4. (最大生成树) 请给出一个算法, 求出一个无向图的最大生成树, 即权重最大的生成树。

解答. 利用第二问的结论, 我们可以将最大生成树问题转化为最小生成树问题, 即将图中所有边的权重取相反数, 然后运行 *Prim* 算法, 得到的最小生成树即为原图的最大生成树。 □