

《算法设计与分析》

12-复习 (Review)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024年1月2日



› 课程总结

› 考试内容



课程总结

《算法设计与分析》究竟上了什么课？

1. 什么是算法？
2. 算法的设计方法。
3. 算法的分析方法。
4. 算法复杂性的基本理论。

算法

算法是用于求解某一问题的一系列计算过程，其包含：

- 输入输出。
- 有穷的指令集。

一般来说，我们需要关注算法的终止性、正确性和复杂性。

求解问题

1. 设计一个算法。
2. 算法是正确的么？
3. 算法的复杂性如何？可以有更好的算法么？

- 穷举算法.
- 归纳算法
 - 基数排序、多项式求值、生成排列等。
- 分治算法
 - 二分查找、归并排序、快速排序、矩阵乘法、快速傅里叶变换等。
- 贪心算法
 - Dijkstra 算法、Prim 算法、Kruskal 算法、Huffman 编码等。
- 动态规划算法
 - 最长公共子序列、矩阵连乘、背包问题、所有点对最短路径问题等。

- 堆和不相交数据集
 - 堆排序、Union–Find 算法。
- 图结构
 - 图的遍历，DFS、BFS。
 - 有向无环图 (DAG) 的拓扑排序、强连通分量算法等。
- 流网络
 - 最大流问题、最小割问题，Ford–Fulkerson 算法、Edmonds–Karp 算法、Dinic 算法等。

- 分析的基本方法
 - 大 O 记号、大 Ω 记号、大 Θ 记号。
 - 时间复杂性、空间复杂性。
- 递归算法的分析
 - 递推式的求解、主定理 (Master Theorem)。

- P 类问题和 NP 类问题
 - 非确定性算法的概念。
- 归约的概念。
 - 归约的方向。
- NP 完全问题。
 - 证明方法。
- 其他复杂性类。
 - co-NP 类问题等。

▶ 考试内容



考试安排

- 考试地点：奉贤 3 教楼 222
- 考试时间：2021 年 1 月 3 日 (周三) 10:45-12:15，共 90 分钟。

试卷构成

试卷 = 20 分判断题 + 80 分综合题

- 判断题一共 4 道，每道 5 分，共 20 分。
- 综合题一共 6 道，共 80 分。

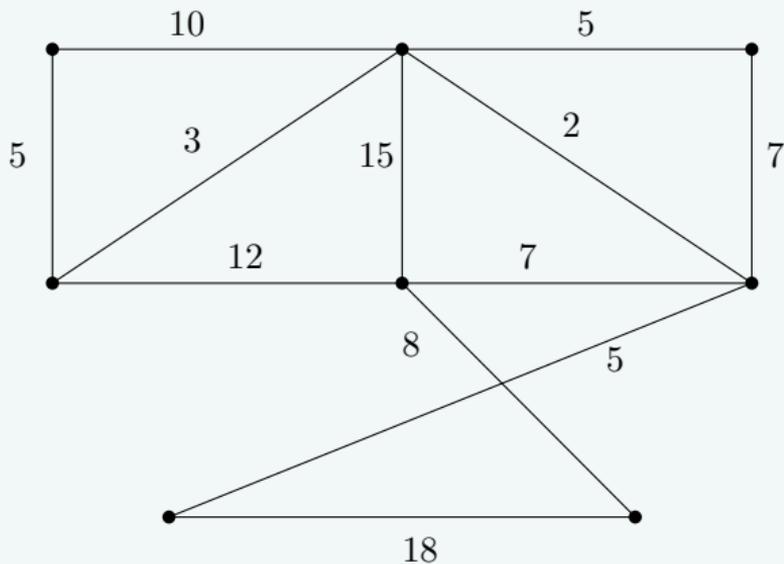
1. 假设某个算法的运行时间满足递推关系 $T(n) = T(n/2) + O(n)$ ，则该算法的时间复杂度为 $O(n)$ 。
2. 如果我们能够将一个问题归约到 3-SAT 问题，那么该问题一定是 NP 完全问题。
3. Dijkstra 算法对于有负权边的图是不正确的。
4. Ford – Fulkerson 算法对于有无理数权重的边也可以获得正确的结果。

解 1.

1. 正确。
2. 错误。
3. 正确。
4. 错误。

问题 2.

1. 设计算法求出一个图的最小生成树。
2. 用你设计的算法求出下列图的最小生成树。



解 3.

1. 利用 Kruskal 算法:

输入: 含权连通无向图 $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$

输出: G 生成的最小生成树所组成的边集 T

1: 按非降序的权重 E 进行排序, 得到 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

2: $T = \emptyset$

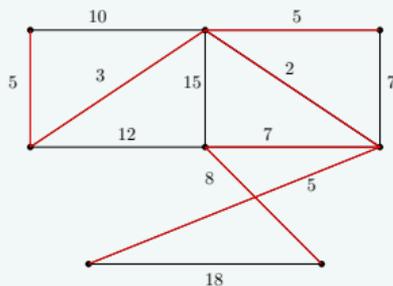
3: **for** $i = 1$ to m **do**

4: **if** $T \cup \{e_i\}$ 不成圈 **then**

5: $T = T \cup \{e_i\}$

6: **return** T

2. 最小生成树如下所示:



问题 4.

QUADEQ 是这样的一类问题。给定 n 个取值为 $0, 1$ 的变量 v_1, \dots, v_n 和 m 个类似如下的方程: $\sum_{i,j \in [n]} a_{ij} v_i v_j = b$, 其中 $a_{ij}, b \in \{0, 1\}$, 这里的加法是在 $\text{mod } 2$ 意义下的加法。问是否存在一个解使得所有的方程都成立?

- 证明这是一个 NP 问题。
- 将 3-SAT 问题归约到 QUADEQ 问题, 从而证明 QUADEQ 问题是 NP 完全问题。

解 5.

1. QUADEQ 是一个 NP 问题, 对于其任何一个解, 代入即可验证其是否是使得方程组成立的解, 这个过程只需要多项式时间, 所以其是一个 NP 问题。
2. 对于 3-SAT 的一个实例公式 f , 假设其有 n 个变量 m 个子句, 对于每一个子句 $C_i = x \vee \neg y \vee z$, 我们构造如下的二次方程:

$$u_{C_{i1}} u_x + u_{C_{i2}} (1 - u_y) + u_{C_{i3}} u_z = 1$$

这里 $u_{C_{ij}}$ 是自由的变元。通过这个变换我们可以将一个 3-SAT 问题转化为一个具有 m 个方程至多 $n + 3m$ 个变量的 QUADEQ 问题实例。这个过程可以在多项式时间内完成。注意到:

- 如果 f 有解, 则我们可以对应构造出一个 QUADEQ 问题实例的解。
- 如果 QUADEQ 问题实例有解, 则我们可以对应构造出 f 的解。

从而我们完成了对 3-SAT 问题到 QUADEQ 问题的多项式时间归约, 即证明了 QUADEQ 问题是 NP 完全问题。

问题 6.

一个机器人位于一个 $m \times n$ 网格的左上角（起始点在下图中标记为 Start）。

机器人每次只能向下或者向右移动一步。机器人试图达到网格的右下角（在下图中标记为 Finish）。

设计算法求出总共有多少条不同的路径，并给出你的算法的时间复杂性。



解 7.

定义状态 $dp[i][j]$ 表示从起点到达 (i, j) 的路径数目, 那么我们有状态转移方程:

$$dp[i][j] = dp[i-1][j] + dp[i][j-1]$$

从而我们的算法可以如下设计:

输入: $m, n \in \mathbb{N}^+$

输出: $dp[m][n]$

- 1: 初始化 $dp[0][0] = 1, dp[i][0] = 1, dp[0][j] = 1$
- 2: **for** $i = 1$ to m **do**
- 3: **for** $j = 1$ to n **do**
- 4: $dp[i][j] = dp[i-1][j] + dp[i][j-1]$
- 5: **return** $dp[m][n]$

算法的时间复杂性为 $O(mn)$, 空间复杂性为 $O(mn)$ 。

祝大家考试顺利！ 提前祝大家新年快乐！