上海师范大学 Shanghai Normal University

《算法设计与分析》

9-动态规划 (Dynamic Programming)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2023 年 11 月 1 日

主要内容

- 什么是动态规划
- 动态规划算法设计

什么是动态规划

回顾 Floyd 算法

让我们回顾一下，Floyd 算法是怎么解决的所有节点对的最短路径问题的？

$$d_{i,j}^{k} = \begin{cases} \omega(i,j) & \text{如果 } k = 0 \text{ 且 } (i,j) \in E \\ \infty & \text{如果 } k = 0 \text{ 且 } (i,j) \notin E \\ \min\{d_{i,j}^{k-1}, d_{i,k}^{k-1} + d_{k,j}^{k-1}\} & \text{如果 } k \geqslant 1 \end{cases}$$

上述递推式做了这两件事：

- 定义了一系列的子问题：节点 i 到节点 j 只经过 $1 \sim k$ 个节点的最短路径。
- “较大”的子问题与“较小”的子问题之间的关系。

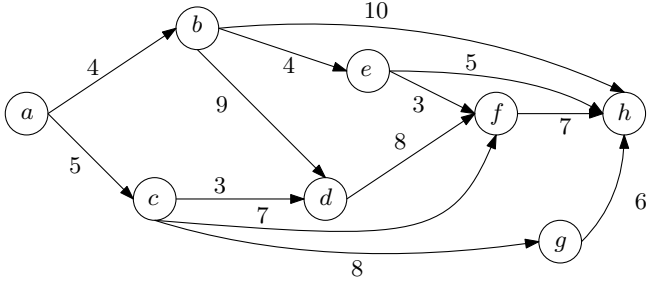
事实上，这是一种通用性很强的解法。我们再来看几个例子。

有向无环图的上的最长路径

第一个例子跟图上的距离相关，只不过这次我们来研究一下 DAG 上的最长路径。

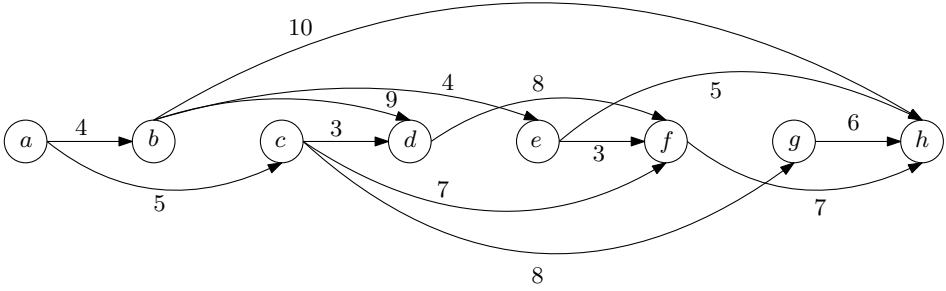
问题 1.

给定一个带权重的有向无环图 $G = (V, E, \omega)$，其中每条边 $(u, v) \in E$ 都有一个权重 $\omega(u, v)$，求 G 上的最长路径。



DAG 的拓扑序

由之前我们可以知道，我们可以将一个 DAG 上的点按照拓扑序排列，如下图所示:



这里我们采取 abcdefgh 的拓扑序。(请注意，拓扑序并不一定是唯一的！) 考察这样一个问题，用 L_i 来表示前 i 个点的子图里的最长路径，L_i 满足什么关系?

DAG 最长路径的递推式

L_i 满足:

$$L_i = \max\{L_j + \omega(j,i),\ (j,i) \in E\}$$

这里为了方便叙述，我们用 i 来指代上述序列中的第 i 个点。

从而我们得到了一个算法:

算法：DAG 上的最长路径

输入: $G = (V, E, \omega)$

输出: G 上的最长路径

1: 计算 G 的拓扑序 $1, 2, \ldots, n$

2: $L_0 \leftarrow 0$

3: **for** $i \leftarrow 1$ to n **do**

4: $\quad L_i \leftarrow \max\{L_j + \omega(j,i),\ (j,i) \in E\}$

5: **return** $\max\{L_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$

时间复杂性 $O(n^2)$!

最长公共子序列

下一个例子则是跟字符串相关-最长公共子序列 (Longest Common Sequence)。假设现在有两个序列:

- $X = x_1 x_2 \dots x_m$
- $Y = y_1 y_2 \dots y_n$

目标是求出 X 和 Y 的最长公共子序列，这里 X 的子序列是形如 $x_{i_1} x_{i_k}, \dots, x_{i_n}$ 满足 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$ 的，Y 的子序列的定义类似。最长公共子序列即指两个序列中共有的长度最长的子序列。

例 2.

$X = ABCBDAB$，$Y = BDCABA$，则 BCBA 是 X 和 Y 的一个最长公共子序列。

求解最长公共子序列-暴力搜索

最简单的方式显然是暴力搜索。

暴力搜索 $O(2^m \cdot n)!$

1. X 一共有 2^n 个子序列。
2. 对于每个子序列，我们需要 $O(n)$ 的时间来判断它是否是 Y 的子序列。

我们尝试给出一个更快的算法，我们利用上述思想来考虑这个问题。

- 定义 L[i][j] 表示 $x_1 \dots x_i$ 与 $y_1 \dots y_j$ 的最长公共子序列的长度。

L[i][j] 之间存在什么联系？

最长公共子序列-动态规划

当 $i, j > 0$ 时，$L[i][j]$ 满足：

- 如果 $x_i = y_j$，则 $L[i][j] = L[i-1][j-1] + 1$。
- 如果 $x_i \neq y_j$，则 $L[i][j] = \max\{L[i-1][j], L[i][j-1]\}$。

因此，我们可以得到如下递推式：

$$L[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{如果 } i = 0 \text{ 或者 } j = 0 \\ L[i-1][j-1] + 1 & \text{如果 } x_i = y_j \\ \max\{L[i][j-1], L[i-1][j]\} & \text{如果 } x_i \neq y_j \end{cases}$$

由上述递推式，我们很容易写出一个算法：

最长公共子序列-动态规划算法

上海师范大学 Shanghai Normal University

算法 LCS

输入: 两个字符串 A, B，长度分别为 m 和 n

输出: A 和 B 的最长公共子序列的长度

```
1:  for i = 1 to m do
2:      L[i][0] ← 0
3:  for j = 1 to n do
4:      L[0][j] ← 0
5:  for i = 1 to m do
6:      for j = 1 to n do
7:          if A[i] = B[j] then
8:              L[i][j] ← L[i − 1][j − 1] + 1
9:          else
10:             L[i][j] ← max{L[i − 1][j], L[i][j − 1]}
11: return L[m][n]
```

时间复杂性：$O(mn)$!

L[i][j] 的更新特点

我们发现，$L[i][j]$ 的更新只与 $L[i-1][j-1], L[i-1][j], L[i][j-1]$ 有关。

	0	1	2	·	j	·	n
0	0	0	0	·	·	·	0
1	0	*	*	·	·	·	*
2	0	*	*	·	·	·	*
·	·	·	·	$L[i-1][j-1]$	$L[i-1][j]$	·	·
i	·	·	·	$L[i][j-1]$	$L[i][j]$	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·
m	0	*	*	·	·	·	$L[m][n]$

这提示我们，事实上，我们并不需要保存整张表，只需要保存两行就可以了。

算法的改进-$O(\min\{m,n\})$ 的空间!

事实上，我们只需要保存一行即可。算法的核心思想即用一个额外的空间来临时保存一下 $L[i-1][j-1]$ 的值。

改进算法 LCS2

输入: 两个字符串 A, B，长度分别为 m 和 n，并且不妨令 $m \leqslant n$

输出: A 和 B 的最长公共子序列的长度

```
for i = 1 to m do
    L[i] ← 0
tmp1 ← 0, tmp2 ← 0
for i = 1 to n do
    for j = 1 to m do
        tmp1 ← tmp2, tmp2 ← L[j]
        if A[j] = B[i] then
            L[j] ← tmp1 + 1
        else
            L[j] ← max{L[j], L[j − 1]}
return L[m]
```

动态规划算法的特点

我们现在讲了两个算法，展示了动态规划的一些威力。我们来总结一下这种思想的特点：

- 首先要定义相应的子问题。
- 子问题之间存在某种联系，即较大的子问题的最优解一定是来源于某些较小的子问题的最优解。

我们将上述两个特点称为最优子结构性质。

贪心算法也具有最优子结构性质！

这个时候让我们再思考一下贪心算法，我们发现，贪心算法也具有最优子结构性质！

- 当前的选择一定是最优解的一部分！

与动态规划不同的是，贪心算法不仅具有最优子结构，而且还具有所谓的贪心选择性质，也就是说其最优解不仅来自于较小的子问题，其还知道最终的最优解来源自哪个子问题的最优解-当前最好的那个！

最优子结构的重要性

我们再通过一个例子来说明最优子结构的重要性。之前我们考察了在 DAG 上的最长路径问题，现在让我们来考虑在一般图上的最长路径问题，特别的我们考察无权的情况，即求出两个点之间的边数最长的简单路径，注意简单路径是不允许包含圈的。

递归解?

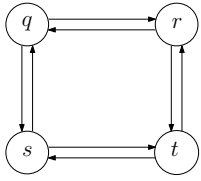
仿照 Floyd 算法，我们可以写出如下的递推式：

$$d_{i,j}^{k} = \begin{cases} \omega(i,j) & \text{如果 } k = 0 \text{ 且 } (i,j) \in E \\ \infty & \text{如果 } k = 0 \text{ 且 } (i,j) \notin E \\ \max\{d_{i,j}^{k-1}, d_{i,k}^{k-1} + d_{k,j}^{k-1}\} & \text{如果 } k \geqslant 1 \end{cases}$$

但很遗憾，上述递推式是错误的。

最长路径的一个反例

我们考察如下的一个图:



q 到 t 的最长路径

- q 到 t 的最长路径显然是 $q \to s \to t$.
- $q \to s$ 和 $s \to t$ 显然都不是 q 到 s 和 s 到 t 的最长路径。

一种理解是，要保证利用到的两个子问题是无关的。

动态规划算法的设计方法

通过上述讨论，我们可以总结出动态规划算法的设计方法：

1. 定义子问题，寻找最优子结构。
2. 给出基于最优子结构的递推式，这一式子也被称作状态转移方程，或者动态规划范式。
3. 写出相应的算法，再针对性的进行优化。

动态规划算法设计

编辑距离

第一个问题还是跟字符串相关的，当拼写检查工具遇到一个可能拼写的错误时，它将在自己的词典中查找与之相近的单词。那么，这里所谓的距离相近怎么表示?

匹配程度

一个自然的想法是，看两个字符串能在多大程度上进行对齐。比如考虑 SNOWY 和 SUNNY 这两个词，其可能有如下的对齐方式:

$$\begin{array}{cc} \mathrm{S}-\mathrm{NOWY} & -\mathrm{SNOW}-\mathrm{Y} \\ \mathrm{SUNN}-\mathrm{Y} & \mathrm{SUN}--\mathrm{NY} \end{array}$$

其中 − 表示一个空隙，我们可以将其随意的插入到每个字符串中。对于一种对齐方式，我们可以定义其代价为上下字符串对应字母不相同的个数，而编辑距离指的是两个字符串对齐方式中的最小代价。

可以看到，上述左边对齐方式的代价为 3，右边为 5。特别的，对于 SNOWY 和 SUNNY。我们不可能找到代价比 3 还小的对齐方式了，因此其编辑距离为 3.

编辑距离-子问题的设计

当我们的目标聚焦于两个字符串 $x_1x_2\dots x_m$ 和 $y_1y_2\dots y_n$ 的编辑距离时，自然我们也会讨论其前缀之间的子问题：

- 定义 E[i][j] 表示 $x_1x_2\dots x_i$ 和 $y_1y_2\dots y_j$ 的编辑距离。

注意到对于任何一个关于 $x_1x_2\dots x_i$ 和 $y_1y_2\dots y_j$ 的对齐方式，其最右端一定是如下的形式：

$$\begin{vmatrix} x_i \\ \\ - \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} - \\ \\ y_j \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} x_i \\ \\ y_j \end{vmatrix}$$

编辑距离-递推式

由上述观察可得，E[i][j] 满足：

- 或者等于 $1 + \mathrm{E}[\mathrm{i}-1][\mathrm{j}]$
- 或者等于 $1 + \mathrm{E}[\mathrm{i}][\mathrm{j}-1]$
- 或者等于 $\mathbf{diff}(\mathrm{i},\mathrm{j}) + \mathrm{E}[\mathrm{i}-1][\mathrm{j}-1]$，这里 $\mathbf{diff}(\mathrm{i},\mathrm{j})$ 表示 $\mathrm{x_i}$ 与 $\mathrm{y}[\mathrm{j}]$ 是否相同，相同为 0，否则为 1。

从而 E[i][j] 遵循如下递推式：

$$\mathrm{E}[\mathrm{i}][\mathrm{j}] = \begin{cases} 0 & \text{如果 } \mathrm{i}=0 \text{ 或者 } \mathrm{j}=0 \\ \min\{1+\mathrm{E}[\mathrm{i}][\mathrm{j}-1], 1+\mathrm{E}[\mathrm{i}-1][\mathrm{j}], \mathrm{E}[\mathrm{i}-1][\mathrm{j}-1]+\mathbf{diff}(\mathrm{i},\mathrm{j})\} & \text{如果 } \mathrm{i},\mathrm{j}\neq 0 \end{cases}$$

编辑距离-算法

上海师范大学 Shanghai Normal University

算法 EditDistance

输入: 两个字符串 A, B，长度分别为 m 和 n

输出: A 和 B 的编辑距离

```
1: for i = 1 to m do
2:     E[i][0] ← 0
3: for j = 1 to n do
4:     E[0][j] ← 0
5: for i = 1 to m do
6:     for j = 1 to n do
7:         E[i][j] ← min{1 + E[i][j − 1], 1 + E[i − 1][j], E[i − 1][j − 1] + diff(i, j)}
8: return E[m][n]
```

1. 显然这是个 $O(mn)$ 的算法。
2. 如同最长公共子序列，我们可以将其优化至 $O(\min\{m, n\})$ 的空间。

矩阵链相乘

在分治算法中，我们介绍过两个矩阵的相乘，现在我们来考虑一下多个矩阵的相乘。注意到矩阵相乘是满足结合律的，考察如下的一个矩阵链相乘：

$$M_1M_2M_3 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,100} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,100} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ b_{100,1} & b_{100,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,100} \\ c_{2,1} & \cdots & c_{2,100} \end{bmatrix}$$

- 如果我们按照 $((M_1M_2)M_3)$ 的顺序进行计算，那么我们需要 $2 \times 100 \times 2 + 2 \times 2 \times 100 = 800$ 次乘法。
- 如果我们按照 $(M_1(M_2M_3))$ 的顺序进行计算，那么我们需要 $100 \times 2 \times 100 + 2 \times 100 \times 100 = 40000$ 次乘法。

$(M_1(M_2M_3))$ 所需的乘法次数足足是 $((M_1M_2)M_3)$ 的 50 倍!

矩阵链相乘-问题定义

上海师范大学 Shanghai Normal University

问题 3.

给定 n 个矩阵 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，其中 A_i 的规模为 $p_{i-1} \times p_i$，求一这 n 个矩阵相乘的所需的最少乘法次数。

我们可以看到，这其中存在着指数多个不同的次数。

矩阵链相乘-所有的次数

事实上，对于 n 个矩阵的相乘，不同的运算顺序会导致不同的乘法次数，比如当计算 4 个矩阵相乘时，我们有如下的 5 种运算顺序:

- $((M_1M_2)M_3)M_4$
- $(M_1(M_2M_3))M_4$
- $(M_1M_2)(M_3M_4)$
- $M_1((M_2M_3)M_4)$
- $M_1(M_2(M_3M_4))$

指数种运算顺序!

事实上，对于 n 个矩阵的相乘，令 $P(n)$ 表示其运算顺序的个数，那么 $P(n)$ 满足: $P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k)$。这是著名的卡特兰数，其通项为 $P(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \Omega(\frac{4^n}{n^{1.5}})$。

矩阵链相乘-子问题的设计

我们现在继续尝试用动态规划来解决这个问题。我们考虑如下的子问题：

- 定义 C[i][j] 表示 $A_i \cdot A_{i+1} \cdot A[j]$ 所需的最小乘法次数。

注意到计算 $A_i \cdot A_{i+1} \times \cdots \times A_j$ 时，最后一步一定是如下的样子：

$$(A_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_j)$$

因此 C[i][j] 一定满足：

$$C[i][j] = \min_{i \leqslant k < j} \{C[i][k] + C[k+1][j] + p_i p_k p_j\}$$

由此我们可以快速得到计算矩阵链相乘最少乘法次数的 $O(n^3)$ 的算法。

矩阵链相乘算法

上海师范大学 Shanghai Normal University

算法：Matchain

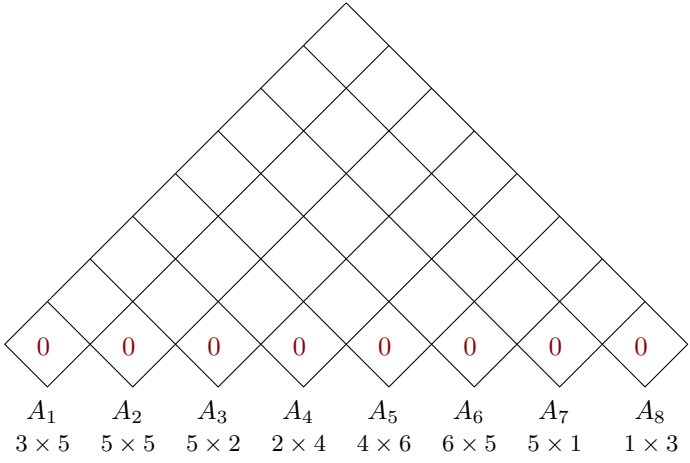
输入: 一个 $n+1$ 维数组 $r[1,\ldots,n]$，其中 $r[i](i \leqslant n)$ 表示第 i 个矩阵的行数，r_{n+1} 第 n 个矩阵的列数。

输出: 这 n 个矩阵相乘所需的最少乘法次数

```
for i ← 1 to n do
    C[i][i] ← 0
for l ← 2 to n do
    for i ← 1 to n − l + 1 do
        j ← i + l − 1
        C[i][j] ← ∞
        for k ← i to j − 1 do
            C[i][j] ← min{C[i][j], C[i][k] + C[k + 1][j] + r[i]r[k + 1]r[j + 1]}
return C[1][n]
```

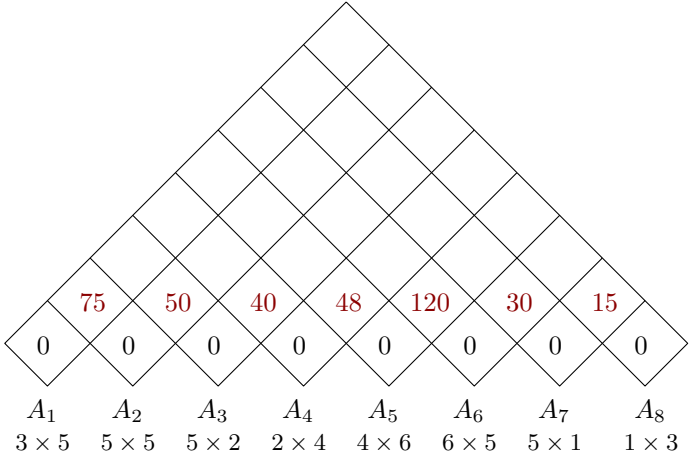
矩阵链相乘图解

我们再用一个例子来解释一下，假设现在考虑 8 个矩阵相乘，其规模分别为 $3 \times 5, 5 \times 5, 5 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 6, 6 \times 5, 5 \times 1, 1 \times 3$，则算法运行如下：



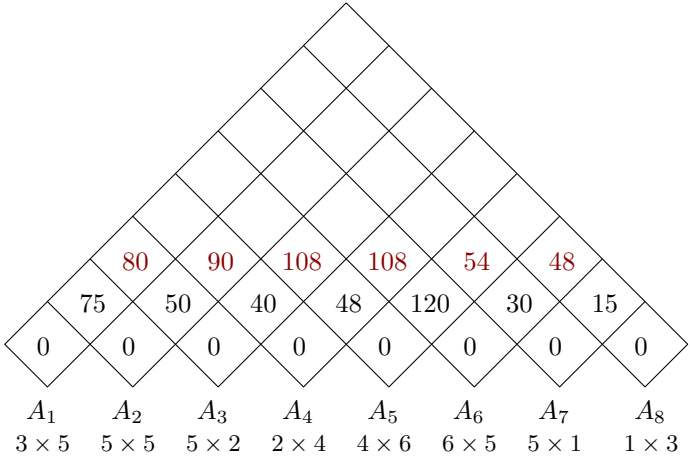
矩阵链相乘图解

我们再用一个例子来解释一下，假设现在考虑 8 个矩阵相乘，其规模分别为 $3 \times 5, 5 \times 5, 5 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 6, 6 \times 5, 5 \times 1, 1 \times 3$，则算法运行如下：



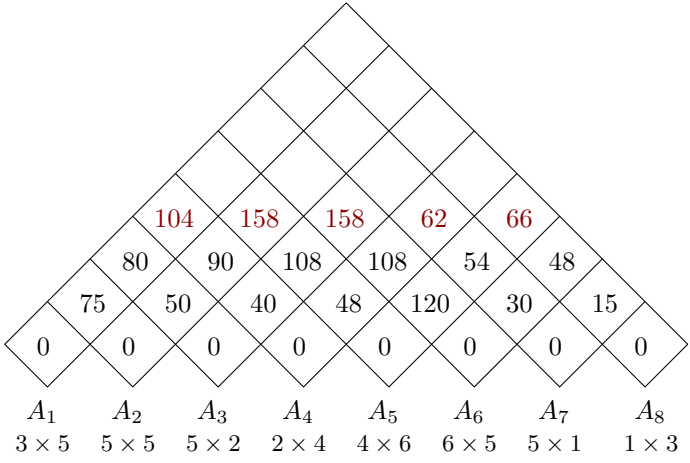
矩阵链相乘图解

我们再用一个例子来解释一下，假设现在考虑 8 个矩阵相乘，其规模分别为 $3 \times 5, 5 \times 5, 5 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 6, 6 \times 5, 5 \times 1, 1 \times 3$，则算法运行如下：



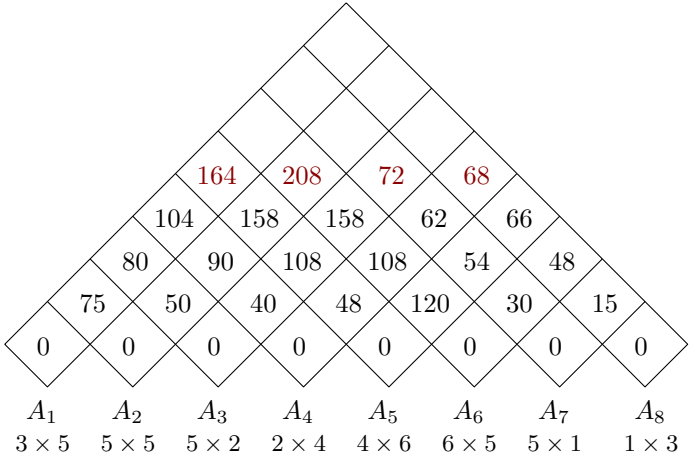
矩阵链相乘图解

我们再用一个例子来解释一下，假设现在考虑 8 个矩阵相乘，其规模分别为 $3 \times 5, 5 \times 5, 5 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 6, 6 \times 5, 5 \times 1, 1 \times 3$，则算法运行如下：



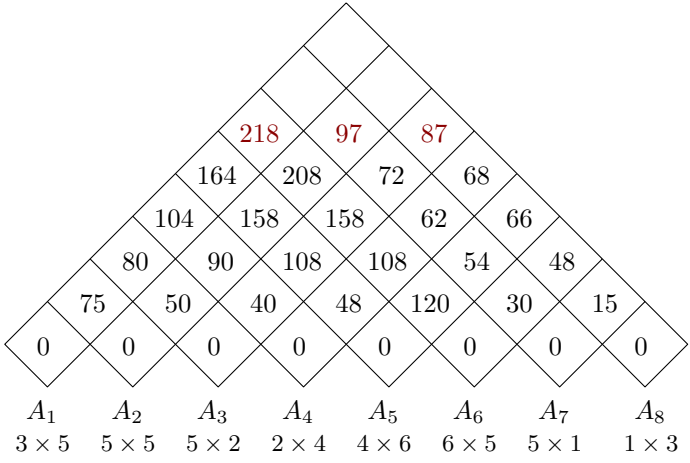
矩阵链相乘图解

我们再用一个例子来解释一下，假设现在考虑 8 个矩阵相乘，其规模分别为 $3 \times 5, 5 \times 5, 5 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 6, 6 \times 5, 5 \times 1, 1 \times 3$，则算法运行如下：



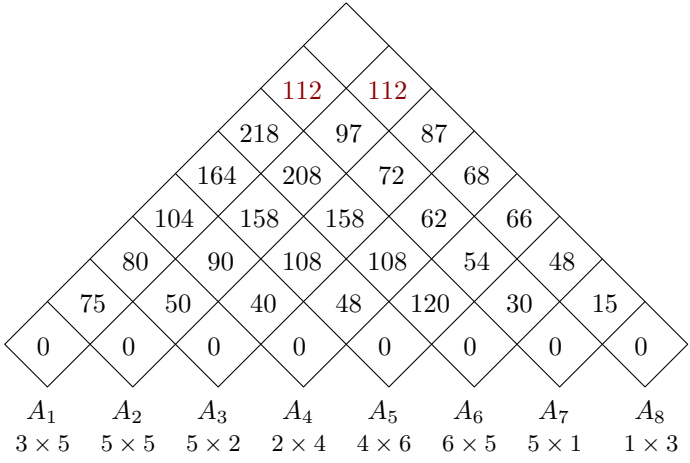
矩阵链相乘图解

我们再用一个例子来解释一下，假设现在考虑 8 个矩阵相乘，其规模分别为 $3 \times 5, 5 \times 5, 5 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 6, 6 \times 5, 5 \times 1, 1 \times 3$，则算法运行如下：



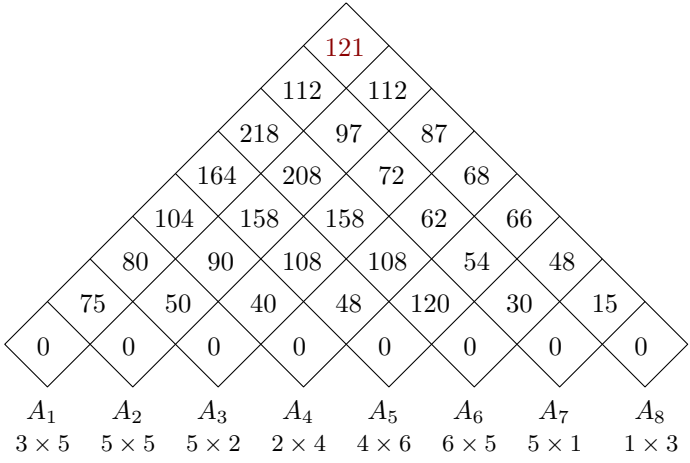
矩阵链相乘图解

我们再用一个例子来解释一下，假设现在考虑 8 个矩阵相乘，其规模分别为 $3 \times 5, 5 \times 5, 5 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 6, 6 \times 5, 5 \times 1, 1 \times 3$，则算法运行如下：



矩阵链相乘图解

我们再用一个例子来解释一下，假设现在考虑 8 个矩阵相乘，其规模分别为 $3 \times 5, 5 \times 5, 5 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 6, 6 \times 5, 5 \times 1, 1 \times 3$，则算法运行如下：



本节的最后，我们来考察动态规划里的一个经典问题-背包问题。

问题 4.

在一次打劫中，盗贼发现他的战利品太多，以至于无法全部带走，于是他必须决定究竟要把哪些战利品装入自己的背包。

假设他的背包一共能装重量为 W 的物品。他一共有 n 件物品，分别重 $w_1, \ldots, w_{\mathrm{n}}$，每件价值分别为 $v_1, \ldots v_{\mathrm{n}}$。请问他应该选哪几件物品装入背包，才能使得背包中的物品总价值最大?

每件物品只能拿一次的背包问题，也被称为 01 背包问题。

例 5.

假设 $W = 10$，且：

物品	重量	价值
1	6	20
2	3	14
3	4	16
4	2	9

最佳方案是什么？

- 拿物品 $2, 3, 4$，一共价值 39.

背包问题的子问题

我们考虑如下的子问题：

- 定义 $V[i][j]$ 表示从前 i 个问题中选出总重量为 j 的物品的最大价值。

显然 $v[i][j]$ 满足：

- 或者等于 $V[i-1][j]$。
- 或者等于 $V[i-1][j-w_i]+v_i$。

即：

$$V[i][j]=\max\{V[i-1][j],V[i][j-w_i]+v_i\}$$

背包问题的算法

上海师范大学 Shanghai Normal University

算法 Knapsack

输入: n 个物品，重量分别为 $w_1, \ldots, w_n$，价值分别为 $v_1, \ldots, v_n$，背包容量为 W

输出: 最大价值

```
1: for j = 0 to W do
2:     V[0][j] ← 0
3: for i = 1 to n do
4:     for j = 0 to W do
5:         if j ⩾ w_i then
6:             V[i][j] ← max{V[i − 1][j], V[i − 1][j − w_i] + v_i}
7:         else
8:             V[i][j] ← V[i − 1][j]
9: return V[n][W]
```

Knapsack 算法分析

- Knapsack 需要 $O(nW)$ 的时间。
- Knapsack 需要 $O(nW)$ 的空间。

Knapsack 算法是多项式时间算法么?

不!

- 请注意，算法输入的 W 是按二进制输入的，因此输入大小是 $\log W$，不是 W，从而这不是一个多项式时间算法。
- 事实上，背包问题是一个 NP 完全问题，这意味着其不太可能有多项式时间算法。

Knapsack 算法的空间还可以再优化么? 可以!

优化空间的 Knapsack 算法

上海师范大学 Shanghai Normal University

算法 Knapsack2

输入: n 个物品，重量分别为 $w_1, \ldots, w_n$，价值分别为 $v_1, \ldots, v_n$，背包容量为 W

输出: 最大价值

```
1: for j = 0 to W do
2:     V[j] ← 0
3: for i = 1 to n do
4:     for j = W to w_i do
5:         if j ⩾ w_i then
6:             V[j] ← max{V[j], V[j − w_i] + v_i}
7: return V[W]
```

Knapsack2 第 4 行为什么要逆着来？ 因为我们要保证 $V[j - w_i]$ 是 $V[i-1][j - w_i]$ 的值。

背包问题的变种-多副本

如果我们允许一件物品多可以重复拿，会发生什么？

例 6.

在上述的例子中 ($W = 10$),

物品	重量	价值
1	6	20
2	3	14
3	4	16
4	2	9

如果允许重复拿，最佳方案变成了5 件物品 4, 总价值 45!

能无限次重复拿的背包问题也被称作完全背包问题。

多副本背包问题的递推式

事实上，我们还可以定义一样的子问题：

- 定义 $V[i][j]$ 表示从前 i 个问题中选出总重量为 j 的物品的最大价值。

只是 $V[i][j]$ 满足：

$$V[i][j] = \max_{l}\{V[i-1][j], V[i][j - l \cdot w_i] + l \cdot v_i\}$$

我们当然可以利用上面的方式继续写出相应的算法，但是注意到我们并不需要决定第 i 件物品拿或不拿，只需要考虑怎么拿价值最大即可。所以类似 Knapsack2 我们有个非常简单的优化方式。

多副本背包问题的算法

上海师范大学 Shanghai Normal University

算法 Knapsack3

输入: n 个物品，重量分别为 $w_1, \ldots, w_n$，价值分别为 $v_1, \ldots, v_n$，背包容量为 W

输出: 最大价值

```
1: for j = 0 to W do
2:     V[j] ← 0
3: for i = 1 to n do
4:     for j = 0 to W do
5:         if j ⩾ w_i then
6:             V[j] ← max{V[j], V[j − w_i] + v_i}
7: return V[W]
```

请注意与 Knapsack2 的区别!

只需要改变第四行循环的顺序，我们就得到了一个多副本背包问题的算法!

关于背包问题

事实上，背包问题还有很多变种，比如：

- 如果允许一件物品拿一部分，即允许分数，则算法是怎么样的？
  贪心算法就起作用了！
- 如果一件物品可以拿多次，但能拿的次数有次数限制，则算法是怎么样的？（多重背包）
- 如果有的能无限拿，有的能重复拿有限多次，有的只能拿一次，那算法是怎么样的？（混合背包）
- ...

后面的问题都可以使用动态规划解决，大家有兴趣的话可以自己尝试一下。

总结

本节内容

- 动态规划算法
  - 什么是动态规划
  - 动态规划算法的特点
- 贪心算法设计举例
  - 编辑距离
  - 矩阵链相乘
  - 背包问题