算法设计与分析 Week 11

第十一周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 11 月 27 日

1. 设计一个非确定算法来求解旅行商问题。

解答.

注意到旅行商问题的叙述如下:

给定 n 个城市和一个 $n \times n$ 的距离矩阵 D，其中 $D[i,j]$ 表示从城市 i 到城市 j 的距离，旅行商要从某个城市出发，经过每个城市恰好一次，最后回到出发的城市，问旅行商的最短路线是什么?

我们考虑其判定问题形式:

给定 n 个城市和一个 $n \times n$ 的距离矩阵 D 以及一个正整数 K，其中 $D[i,j]$ 表示从城市 i 到城市 j 的距离，旅行商要从某个城市出发，经过每个城市恰好一次，最后回到出发的城市，问是否存在一条长度不超过 K 的路线?

一个求解旅行商问题判定版本的非确定算法如下:

判定版本的旅行商问题 DTSP(G,K)

- **猜测阶段** 猜测长度为 n 一个顶点序列.
- **验证阶段** 验证该序列是否为一个满足要求的路径，即:
  - 该序列是否是一条路径。
  - 该序列是否恰好包含 n 个顶点。
  - 如果是一条路径，长度是否不超过 K。

  如果满足上述条件，则接受，否则拒绝。

对于最优化版本，我们可以使用通用的策略，即令 $K = \sum_{i,j} D[i,j]$，不停的二分调用判定版本的非确定性算法，直到找到最小的 K 使得该算法接受。具体如下:

求解旅行商问题 TSP(G)

- 调用 DTSP(G,K)，其中 $K = \sum_{i,j} D[i,j]$，如果返回 False，则拒绝。
- 否则令 $K = \frac{K}{2}$，继续调用 DTSP(G,K)。
- 如果返回 True，则继续调用 DTSP(G,$\frac{K'}{2}$); 否则调用 DTSP(G,$\frac{K'+K}{2}$)，直到找到最小的 K 使得该算法接受。

□

2. 考察图的团问题的判定版本和优化版本：

图的团问题的判定版本

- **输入**：图 G 和正整数 k。
- **输出**：是否存在一个大小为 k 的团。

图的团问题的优化版本

- **输入**：图 G。
- **输出**：图 G 的最大团的大小。

假设现在有一个多项式时间的算法可以解决图的团问题的判定版本，试证明可以在多项式时间内解决图的团问题的优化版本。

解答. 我们使用通用的策略，假设有一个多项式时间的算法 $\mathrm{DCliq}(G,k)$ 判定图的团问题的判定版本，注意到 G 中最大的团的大小不会超过 $|V|$，因此我们可以使用如下的策略：

求解图的团问题 $\mathrm{Cliq}(G)$

- 调用 $\mathrm{DCliq}(G,K)$，其中 $K=|V|$，如果返回 False，则拒绝。
- 否则令 $K'=\frac{K}{2}$，继续调用 $\mathrm{DCliq}(G,K')$。
- 如果返回 True，则继续调用 $\mathrm{DCliq}(G,\frac{K'}{2})$；否则调用 $\mathrm{DCliq}(G,\frac{K'+K}{2})$，直到找到最小的 K 使得该算法接受。

$\square$

3. (三角剖分) 给定平面上包含 n 个顶点的凸多边形 P（给定各顶点的坐标），P 的一个三角剖分由 P 中除端点外不相交的 $n-3$ 条对角线构成，使得 P 被分割成 $n-2$ 个三角形。三角剖分的代价是所有对角线长度之和，请设计一个高效的算法来求解 P 中代价最小的三角剖分。

解答. 我们可以使用动态规划的方法来解决该问题，将这 n 个顶点逆时针编号 $1,2,\cdots,n$。我们定义 $dp[i][j]$ 为从第 i 个顶点逆时针到第 j 个顶点组成的凸多边形中的最小三角剖分代价，则 $dp[i][j]$ 满足：

$$dp[i][j]=0 \quad \text{if } j-i\leqslant 2$$

并且我们有如下的递推关系：

$$dp[i][j]=\min_{i+1<k<j}\{dp[i][k]+dp[k][j]+\mathrm{dist}(i,k)\}$$

其中 $\mathrm{dist}(i,j)$ 表示第 i 个顶点到第 j 个顶点的距离。我们可以使用如下的动态规划算法来求解该问题：

三角剖分的最小代价

输入： 顶点集合 V，$n = |V|$
输出： 三角剖分的最小代价

```
function MinCost(V, n)
    dp ← new array[n][n]
    for i = 1 to n do
        dp[i][i] ← 0
        dp[i][i+1] ← 0
        dp[i][i+2] ← 0
    end for
    for l = 3 to n do
        for i = 1 to n − l do
            j ← i + l
            dp[i][j] ← ∞
            for k = i + 2 to j − 1 do
                dp[i][j] ← min{dp[i][j], dp[i][k] + dp[k][j] + dist(i, k)}
            end for
        end for
    end for
    return dp[1][n]
end function
```

该算法的时间复杂度为 $O(n^3)$。 □

4. (2−SAT 问题)2−SAT 问题是在 SAT 问题基础上增加每个子句至多包含两个文字的限制，即每个子句形如 $(c \vee c')$，这里的 c 为 x_i 或者 $\neg x_i$。我们可以发现，增加了这样的限制后，该问题便是可以高效解决的了。请给出一个多项式时间的算法赖求解 2−SAT 问题。

Hint: 可以考虑将其转换成一张图

解答. 我们将其转换成一张图，给定一个具有 n 个变量的 2−SAT 公式 f，其有 m 个子句 C_i, 我们构造如下的图 $G = (V, E)$：

- $V = \{v_x, v_{\neg x} \mid x \text{ 是 } f \text{ 的一个变量}\}$.
- E 中包含这样的边：
  - 对于每个子句 C_i，如果 $C_i = (c \vee c')$，则 E 中包含边 $(v_{\neg c}, v_{c'})$ 和 $(v_{\neg c'}, v_c)$。

图 G 具有如下的性质：如果存在一条 v_x 到 v_y 的路径，则必然存在一条 $v_{\neg y}$ 到 $v_{\neg x}$ 的路径。我们断言，如果 G 中存在某个强连通分量 C，使得 C 中同时包含了 v_x 和 $v_{\neg x}$，则 f 不可满足；否则 f 可满足。

事实上，如果 C 中同时包含了 v_x 和 $v_{\neg x}$，则存在一条从 v_x 到 $v_{\neg x}$ 的环。反设 f 是可满足的，考虑任何一个使其可满足的赋值，其一定将 x 赋值为 True 或者 False，不妨设为 True，令 v_x 到 $v_{\neg x}$ 的环上的顶点依次如下:

$$v_x, v_{x_1}, \dots v_{x_k}, v_{\neg x}, v_{y_1}, \dots v_{y_l}, v_x$$

注意到 $(v_x, v_{x_1}) \in E$，由定义：$\neg x \vee x_1$ 是 f 的一个子句，由 f 是可满足的，可得 $\neg x \vee x_1$ 为真，从而 x_1 必须为真。同理可得 $x_2, \dots, x_k$ 都为真，从而 $v_{\neg x}$ 到 v_x 的环上的顶点都为真，从而 $\neg x$ 为真，与 x 为真矛盾，因此 f 不可满足。

另一方面，如果 G 中不存在一个强连通分量同时包含了 v_x 和 $v_{\neg x}$，则我们可以通过如下的方式构造一个相应的使 f 满足的赋值:

- 对于每个变元 x，如果存在 v_x 到 $v_{\neg x}$ 的路径，则令 x 为 False；如果存在 $v_{\neg x}$ 到 v_x 否则令 x 为 True；我们记这一部分为真的文字为 $Var = \{x_1, \dots, x_k\}$(也就是说如果 x 赋值为 0，我们就添加 $\neg x$ 进去)
- 对于剩余的变元 x，如果存在 Var 中对应的点到 v_x 的路径，则赋值为 True; 如果存在 Var 中对应的点到 $v_{\neg x}$ 的路径，则赋值为 False。
- 若还剩余变元，则对其随意赋值。

我们证明上述赋值是使 f 满足的。事实上我们只需要证明上述赋值时不会矛盾的即可，因为其满足了所有边对应的析取子句。这由下述事实保证:

- 如果在第一步中，x 和 y 被赋值，不妨设为 False 和 True。如果此时存在一条 v_y 到 v_x 的路径，则必然存在一条 $v_{\neg x}$ 到 $v_{\neg y}$ 的路径，从而存在一个 $v_x \to *v_{\neg x} \to^* v_{\neg y} \to^* v_y \to^* v_x$ 的环，矛盾。
- 如果在第二步中，对于某个变元 z；其从第一步赋值的变元 x, y 出发会得到不同的赋值结果，即令 x 和 y 分别被赋为 False 和 True，则存在如下的两条路径:

  $$v_x \to^* v_{\neg x} \to^* v_{\neg z},\ v_{\neg y} \to^* v_y \to^* v_z$$

  则由上述的性质，我们存在如下的圈:

  $$v_x \to^* v_{\neg x} \to^* v_{\neg z} \to^* \ v_{\neg y} \to^* v_y \to^* v_z \to^* v_x$$

  形成矛盾。

注意到构造 G 的过程是多项式的，而求解强连通分量的过程也是多项式的，因此我们可以在多项式时间内求解 2−SAT 问题。 □

5. 给定有向图 $G = (V, E)$，子集 $E' \subseteq E$ 称为一个反馈弧集合是指，将其移除后使得图 G 变成一个无环图。

   反馈弧集合问题 (FAS): 给定有向图 $G = (V, E)$ 和 b，是否存在一个大小不超过 b 的反馈弧集合? 请证明 FAS 问题是 NP 问题。

Remark 0.1

事实上，我们可以进一步证明 FAS 问题是 NP 完全问题，这会是下一次的作业。

解答. 注意到给定一个反馈弧集合 E'，我们可以在多项式时间内验证其是否是一个反馈弧集合，只需要检查 $G - E'$ 是否是存在环的即可，该问题可以通过 DFS 的方式得出，即一旦搜索到一个回边，即可判断存在环，其时间复杂度为 $O(|V| + |E|)$，即可以在多项式时间内验证 E' 是否是反馈弧集合，因此 FAS 问题是 NP 问题。 □