

第十二周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 11 月 27 日

截止日期 2023 年 12 月 4 日晚 24: 00

1. 证明 $NP = P$ 当且仅当对于某个 NP 完全问题 Π , $\Pi \in P$ 。
2. 课上已经说过, 团问题是 NP 完全的, 现在我们考虑其一个子问题, 即顶点度数不超过 3 的团问题, 我们称其为 **Clique-3**:
 - (1) 证明 **Clique-3** 是 NP 问题?
 - (2) 请指出下列证明 **Clique-3** 是 NP 完全问题的错误之处:

我们知道一般的团问题是 NP-完全的, 因此仅需要找打一个由 **Clique-3** 到团问题的归约。给定一个顶点度数不超过 3 的图 G 和参数 k , 归约保持该图和参数不变; 显然归约的输出是团问题的一个可能输入。此外, 两个问题的解相同。这样就证明了归约的正确性, 从而 **Clique-3** 是 NP-完全的。
 - (3) 尝试给出一个对 **Clique-3** 问题的算法, 它是多项式的么?
3. **独立集问题 (Independent Set)**: 图的独立集指的是顶点的一个子集 V' , 满足图中的每条边至多与 V' 的一个点相关联。独立集问题是指给定一个图 G 和参数 k , 判断是否存在一个独立集 V' , 使得 $|V'| \geq k$ 。证明独立集问题是 NP 完全的。

(Hint: 尝试用团问题去归约。)
4. **反馈弧集合问题 (FAS)**: 给定有向图 $G = (V, E)$ 和 b , 是否存在一个大小不超过 b 的反馈弧集合? 在上一次作业中, 我们已经证明了其是 NP 问题, 现在请证明其是 NP 完全问题。

(Hint: 尝试用顶点覆盖问题去归约。)
5. **吝啬 SAT 问题 (Stingy SAT)**: 我们考察这样一个受限的 SAT 问题, 给定一个合取范式 f 和整数 k , 是否存在一个至多有 k 个变量赋值为真的赋值使得公式 f 为真? 证明该问题是 NP 完全的。