算法设计与分析 Week 12

第十二周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 12 月 4 日

1. 证明 $NP = P$ 当且仅当对于某个 NP 完全问题 Π，$\Pi \in P$。

解答. 我们已经有 $P \subseteq NP$，因此只需要证明 $NP \subseteq P$，即证明任何一个 NP 问题 Π' 都有确定的多项式时间算法。注意到 $\Pi \in P$，我们构建如下的算法：

- 由于 Π 是 NP 完全问题，所以 $\Pi' \propto_{poly} \Pi$，即存在一个多项式时间的归约算法 R，使得对于任何一个 Π' 的实例 I'，$R(I')$ 是 Π 的一个实例 I，并且 $R(I')$ 的规模为 $O(|I'|^k)$，k 是一个常数。
- 调用 Π' 的多项式时间算法，解决 $R(I')$，得到 I' 的结果。

上述是一个多项式时间的算法，因此 $NP \subseteq P$，从而 $NP = P$。 □

2. 课上已经说过，团问题是 NP 完全的，现在我们考虑其一个子问题，即顶点度数不超过 3 的团问题，我们称其为 $Clique{-}3$：

(1) 证明 $Clique{-}3$ 是 NP 问题?

(2) 请指出下列证明 $Clique{-}3$ 是 NP 完全问题的错误之处：

我们知道一般的团问题是 NP-完全的，因此仅需要找打一个由 $Clique{-}3$ 到团问题的归约。给定一个顶点度数不超过 3 的图 G 和参数 k，归约保持该图和参数不变；显然归约的输出是团问题的一个可能输入。此外，两个问题的解相同。这样就证明了归约的正确性，从而 $Clique{-}3$ 是 NP-完全的。

(3) 尝试给出一个对 $Clique{-}3$ 问题的算法，它是多项式的么?

解答.

(1) 给定 3 个点，我们可以在多项式时间内验证其是否为一个团，因此 $Clique{-}3$ 是 NP 问题。

(2) 该证明的错误之处在于归约方向反了，将此问题归约到一个 NP 完全问题并不能说明该问题是 NP 完全的。

(3) 我们的算法就是枚举所有的可能性并验证。注意到一次验证是常数时间，同时枚举的可能性为 $\binom{n}{4} = O(n^4)$(因为至多存在 4 个点的团集)，因此该算法是多项式的。

□

Remark 0.1

在规约的时候一定要注意规约的方向，将一个简单的问题规约到一个复杂的问题并不能说明任何问题。以及需要注意的是规约的过程不能过长。

3. **独立集问题 (Independent Set)**: 图的独立集指的是顶点的一个子集 V'，满足图中的每条边至多于 V' 的一个点相关联。独立集问题是指给定一个图 G 和参数 k，判断是否存在一个独立集 V'，使得 $|V'| \geqslant k$。证明独立集问题是 NP 完全的。

   (Hint: 尝试用团问题去归约。)

解答. 首先注意到独立集的等价定义为 V' 中不存在边。

(1) 注意到给定一个子集，我们可以在 $O(|V||E|)$ 的时间内验证其是否是独立集，因此其是 NP 问题。

(2) 我们将团问题归约到独立集问题，给定一个图 G 和参数 k，我们构造相应的图 G' 为 G 的补图，$k' = k$，我们有如下事实：

- G 有一个 k 个顶点的团当且仅当 G' 有一个 k 个顶点的独立集。

这是因为如果 G 有一个 k 个顶点的团, 其顶点为 $v_1, \ldots, v_k$，则相应的这 k 个点即为 G' 的独立集，反之同理。这显然是一个多项式时间归约，从而我们完成了证明。

□

4. **反馈弧集合问题 (FAS):** 给定有向图 $G = (V, E)$ 和 b，是否存在一个大小不超过 b 的反馈弧集合？在上一次作业中，我们已经证明了其是 NP 问题，现在请证明其是 NP 完全问题。

   (Hint: 尝试用顶点覆盖问题去归约。)

解答. 在上次作业中，我们已经完成了属于 NP 问题的证明，现在我们进一步通过顶点覆盖问题到该问题的归约完成 NP 完全性的证明。

(1) 给定一个顶点覆盖问题的实例 $G = (V, E)$ 和参数 k，不妨令 G 有 n 个顶点 $v_1, \ldots, v_n$。我们构造一个 FAS 问题的实例：

- $b = k$。
- 有向图 $G' = (V', E')$ 的构造如下，其中 $V' = \{u_1, w_1, \ldots, u_n, w_n\}$(可以理解为把 V 复制了一倍)，边集 E' 定义如下：

$$E' = \{(u_i, w_i)\} \cup \{(w_i, u_j), (w_j, u_i) \mid (v_i, v_j) \in E\}.$$

显然 $|E'| = n + 2|E|$，从而该规约可以在多项式时间内完成。

(2) 下面我们证明如下两个引理：

Lemma 0.2

若 G 有一个大小为 k 的顶点覆盖，则 G' 有一个大小为 k 的反馈弧集合。

解答. 假设 G 有一个大小为 k 的顶点覆盖 $V_c\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$，我们宣称下列边集是 G' 上一个大小为 k 的反馈弧集合：

$$E' = \{(u_{i_j}, w_{i_j}) \mid j \in [k]\}$$

事实上，考虑 G' 中任意一个圈，其一定满足这样的形式：

$$u_{j_1} \to w_{j_1} \to u_{j_2} \to w_{j_2} \to \cdots \to u_{j_l} \to w_{j_l} \to u_{j_1}.$$

注意到 $w_{j_l} \to u_{j_1}$，从而 $(w_{j_1}, u_{j_l}) \in E'$，因此 $(v_{j_l}, v_{j_1}) \in E$。从而存 v_{j_1}, v_{j_l} 之一在 V_c 中，从而 (u_{j_1}, w_{j_1}) 或者 (u_{j_l}, w_{j_l}) 在 E' 中，因此删去 E' 后上述圈不会出现在剩余的图中，由上述圈的任意性，图中不会有圈，从而 E' 是一个反馈弧集合，引理得证。 □

Lemma 0.3

若 G' 有一个大小为 k 的反馈弧集合，则 G 有一个大小不超过 k 的顶点覆盖。

解答. 令反馈弧集合为 $E_b = E_1 \cup E_2$，其中：

- $E_1 = \{(u_{i_j}, w_{i_j})\}$。
- $E_2 = \{(w_{i_j}, u_{i_l})\}$。

定义集合 $E_0 = E_1 \cup \{(u_{i_j}, w_{i_j}) \mid (w_{i_j}, u_{i_l}) \in E_2\}$，显然 $|E_0| \leqslant k$。我们首先证明 E_0 也是个反馈弧集合。考察 G' 中任一个圈，令其边集合为 E_π。由定义 $E_\pi \cap E_b \neq \emptyset$，共有两种情况：

- $E_\pi \cap E_1 \neq \emptyset$，此时 $E_\pi \cap E_0 \neq \emptyset$，从而在 $G' - E_0$ 中该圈也不复存在。
- $E_\pi \cap E_2 \neq \emptyset$，不妨令其一条边为 (w_{i_j}, u_{i_l})，则由 G' 的定义，$(u_{i_j}, w_{i_j}) \in E_\pi$，从而 $E_\pi \cap E_0 \neq \emptyset$，即 $G' - E_0$ 中该圈也不复存在。

由于圈的任意性，E_0 也是个反馈弧集合。下面定义 G 中的一个顶点集合 $V_c = \{v_{i_j} \mid (u_{i_j}, w_{i_j}) \in E_0\}$。下面证明 V_c 是一个顶点覆盖：

- 对于任意一条边 $(v_{i_j}, v_{i_l}) \in E$，由于在 G' 中我们可以构造 $u_{i_j} \to w_{i_j} \to u_{i_l} \to w_{i_l} \to u_{i_j}$ 这样一个圈，从而必然存在 $o \in \{i_j, i_l\}$ 使得 $(u_o, w_o) \in E_0$，从而 $v_o \in V_c$，即 V_c 是一个顶点覆盖。

注意到 $|V_c| = |E_0| \leqslant k$，从而引理得证。 □

由引理 0.2和引理 0.3，我们完成了规约的正确性证明，从而 FAS 是 NP 完全问题。

□

5. **吝啬 SAT 问题 (Stingy SAT)**: 我们考察这样一个受限的 SAT 问题，给定一个合取范式 f 和整数 k，是否存在一个至多有 k 个变量赋值为真的赋值使得公式 f 为真？证明该问题是 NP 完全的。

解答. 注意到，对于一个赋值，我们可以在多项式时间内验证其是否有至多 k 个变量为真，并且验证其是否满足公式 f，因此该问题是 NP 问题。下面我们将 SAT 问题规约到该问题，从而完成 NP 完全性的证明。

(1) 给定一个 SAT 问题的实例 f，令其变量个数为 n，现在我们构造一个 Stingy SAT 问题的实例，其输入是 f 和 $k = n$，显然这是可以在多项式时间内完成的。
(2) 注意到 f 至多有 n 个变量，因此其是可满足的当且仅当存在一个至多有 n 个变量为真的赋值使得 f 为真。从而我们完成了规约。

□