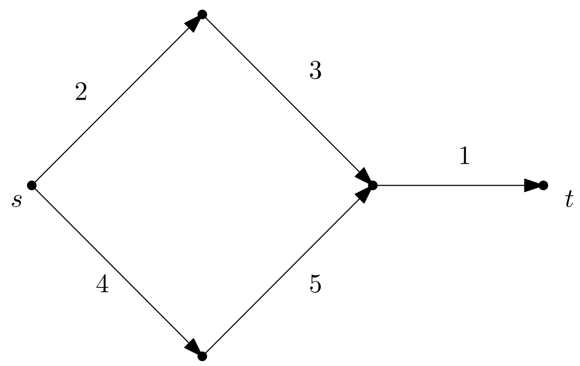
算法设计与分析 Week 13

# 第十三周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 12 月 11 日

1. 证明或者否定下列结论：如果一个网络中所有的容量值是互不相同的，则存在一个唯一的流函数，其给出一个最大流。

**解答.** 这个结论很遗憾是不对的，考察下面的反例：




显然最大流是 1。但我们可以构造出两个不同的最大流：

- 从上方经过 1 的流
- 从下方经过 1 的流

□

2. 给出一个有效算法，它在一个给定的带边容量的有向无回路图中寻找最大瓶颈容量的路径，这里一条路径的瓶颈容量是指路径上最小的边的容量。

**解答.** 最大瓶颈容量的路径即最小容量的边最大的路径，记 $u$ 到 $v$ 的最大瓶颈容量路径为 $L[u][v]$，则有：

- $L[u][v] = \max_{(w,v)\in E} \min\{L[u][w], c(w,v)\}$

因此我们可以利用动态规划的思路，从小到大计算 $L[u][v]$，最终得到 $L[s][t]$ 即为所求。但题目对图有额外限制，即图中不存在回路，因此我们可以利用拓扑排序的思路，按此顺序进行更新。具体思路如下：

(1) 对图 G 进行拓扑排序，得到顶点序列 $v_1, v_2, \cdots, v_n$；注意到此时我们可以假设 $v_1 = s$, $v_n = t$。

(2) 令 $L[v_1][v_1] = \infty$，对于 $j = 1, 2, \cdots, n$，计算 $L[v_1][v_j]$，计算公式如下：

(3) $L[v_1][v_j] = \max\{\min\{L[v_1][v_k], (v_k, v_j) \in E\}\}$

(4) $L[v_1][v_n]$ 即为所求路径。

注意到拓扑排序的复杂度为 $O(|V|+|E|)$，对于固定的 $j$ 更新 $L[v_1][v_j]$ 需要 $O(j)$ 的复杂性，因此整个算法的复杂性为 $O(|V|^2)$。 □

3. 最大流问题有许多常见的变型。现在考虑这样一个问题，如果不止每条边存在流量限制，每个顶点也存在流量限制，那么最大流问题如何求解？

   Hint: 如何转化成一般的最大流问题？

**解答.** 我们将这一特殊的最大流问题转换成一般的最大流问题。

给定一个具有顶点流量限制的流网络 $G=(V,E,c_1,c_2,s,t)$,其中 $c_1$ 是边上的容量限制函数,$c_2$ 是顶点上的容量限制函数,$s$ 和 $t$ 分别是源点和汇点。我们构造一个新的流网络 $G'=(V',E',c',s_in,t_out)$,其中:

- $V'=\{v_{in},v_{out}\mid v\in V\}$，即每个节点都变成了两个
- $E'=E_1\cup E_2$，其中:
  - $E_1=\{(v_{in},v_{out})\mid v\in V\}$
  - $E_2=\{(u_{out},v_{in})\mid (u,v)\in E\}$
- 对于 $e=(u_{in},u_{out})\in E_1$ 我们有 $c'(e)=c_2(u)$; 对于 $e=(u_{out},v_{in})\in E_2$ 我们有 $c'(e)=c_1(u,v)$

我们可以证明，$G'$ 的最大流就是 $G$ 的最大流。因此我们可以利用 Dinic 算法来求解 $G'$ 的最大流，从而求解 $G$ 的最大流。注意到 $G'$ 的顶点个数是 $G$ 的两倍，因此该算法的复杂性依旧为 $O(|V|^3)$。 □

4. Adam 教授有两个儿子，可不幸的是，他们互相讨厌对方。随着时间的推移，问题变的愈发严重，他们之间不仅不愿意一起走到学校，甚至每个人都拒绝走另一个人当天走过的道路。两个孩子对于自己所走的路径与对方所走的路径是否在街角交叉并不在意。幸运的是，Adam 教授的家和学校都位于街角上。Adam 教授有小镇的地图，他想知道他能否在满足上述条件的情况下把他的两个儿子送到学校。请将其建模成一个网络流问题来帮助 Adam 教授。

**解答.** 我们将其建模成一个流网络问题。构造如下的流网络 $G=(V,E,c,s,t)$，其中:

- $V=\{s,t\}\cup\{v\}$，其中顶点 $v$ 表示地图上不同的街角，特别的我们令 $s$ 是 Adam 教授的家，$t$ 是学校，。
- $E=\{(u,v)\mid u,v\in V, u$ 到 $v$ 有一条直达的路$\}$，即 $E$ 中的边表示地图上的道路。
- 对于所有的 $e\in E$,$c(e)=1$，即每条道路的容量都是 1。

我们可以看到，如果 Adam 教授的两个儿子可以同时到达学校，当且仅当存在一个大于 $2$ 的 $s$ 到 $t$ 的流。具体流程如下:

(1) 对 $G$ 进行 Dinic 算法，得到一个最大流 $f$。

(2) 如果 $f \geqslant 2$，则 Adam 教授可以按要求将两个儿子送达学校，否则不能。

□

5. 给定有向图 $G = (V, E)$ 和其中两个特殊的顶点 $s, t$。试设计一个有效算法，找出 $s$ 到 $t$ 的边不相交的路径的最大条数。

**解答.** 这个问题可以简单的转换成最大流问题。构造如下的一个流网络 $G = (V, E, c)$，不需要对点和边做任何改动，只需要对每条边的容量限制设为 $1$。则我们有如下事实:

- $s$ 到 $t$ 的边不相交的路径的最大条数等于 $G$ 中的最大流的值。

只要注意到，一条 $s$ 到 $t$ 的路径是并且只可能是一个容量为 $1$ 的流，而两条不相交的路径的流可以叠加即可获得上述结论。

从而我们在流网络上运用最大流算法求解最大流即可。 □