第十四周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 12 月 18 日

1. 在一个无向图 $G=(V,E)$ 中，称 $D\subseteq V$ 是一个占优集，如果对于任意 $u\in V$，要么 $u\in D$，要么存在 $v\in D$，$(u,v)\in E$。**占优集问题**是指给定无向图 $G=(V,E)$ 和正整数 k，判断是否存在一个占优集 D，使得 $|D|\leqslant k$。

   请证明占优集问题是 NP-完全的。

   解答. 首先，注意到给定一个占优集 D，可以在多项式时间内验证 D 是否满足占优集的定义。因此，占优集问题是一个 NP 问题。

   其次我们将顶点覆盖问题归约到占有集问题,来完成 NP-完全的证明:给定一个无向图 $G=(V,E)$ 和正整数 k，我们构造如下占有集问题的实例:

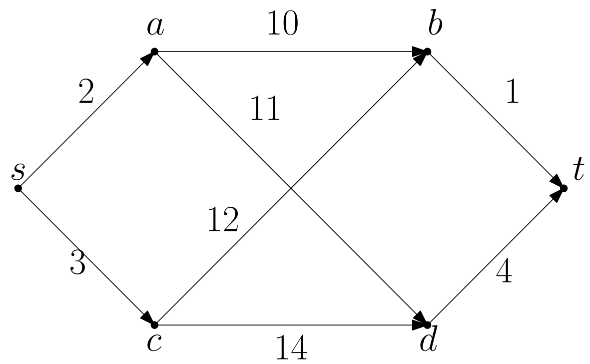
   (1) 找出 G 中的孤立点集合 $V'\subseteq V$，记 $|V'|=l$

   (2) 构造图 $G'=G$，$k'=k+l$

   不难验 0 证，G 存在顶点覆盖集 C，使得 $|C|\leqslant k$ 当且仅当 G' 存在占优集 D，使得 $|D|\leqslant k'$。 □

2. 证明或者否定下列结论：如果一个网络所有容量值是不同的，则存在一个唯一的最小割，其把源节点和汇节点分开。

   解答. 很遗憾，这个结论是错误的。考虑如下的反例：



   其所有的容量值都不相同，但却存在两个最小割：$(\{s\},\{a,b,c,d,t\})$ 和 $(\{s,a,b,c,d\},\{t\})$。 □

3. 假设有人告诉你某个网络上最大流问题的解。请给出一个线性时间的算法，判断该解是否真的是最优。

解答. 假设该流是 f，由 Fold-Fulkerson 算法，我们只需要在其剩余图 G_f 上判断是否存在 s 到 t 的路径即可判断，该判断过程可以通过 BFS 或者 DFS 完成，时间复杂度为 $O(|V|+|E|)$，即是线性的时间。 □

4. 在一个流网络中，一条边被称为是临界的，是指降低其容量将导致最大流规模下降。请给出一个寻找网络中临界边的高效算法。

解答. 注意到一个最小割中的横跨边都是临界边，因而我们自然有如下的算法:

(1) 利用 Ford-Fulkerson 算法/Edmonds-Karp 算法/Dinic 算法等找到一个最大流 f

(2) 通过 f 找到一个最小割 (S,T)(通过在剩余图 G_f 中找到所有从 s 可达的点即可)

(3) 输出 (S,T) 中的横跨边。

□

Remark 0.1

这里注意到的是，我们只需要找到临界边即可，并不需要我们找到所有的临界边。

5. 令 $G=(V_1,V_2,E)$ 是一个二分图。G 的一个边覆盖 C 是 E 中一个边集，使得 G 中每一个顶点至少和 C 中一条边相关联，试设计一个算法，找出 G 中规模最小的边覆盖集。

解答. 事实上，我们可以将二分图的最小边覆盖问题转化为最大匹配问题。具体算法流程如下:

(1) 利用匈牙利算法或者网络流求出最大匹配 M，将 M 中的边加入边覆盖集 C

(2) 对于不在最大匹配中的点，我们将其与其相邻的一条边边加入边覆盖集 C

事实上，我们可以证明这样得到的 C 一定是边的最小覆盖集，反设存在更小的边覆盖集 C'，我们寻找 C' 的一个极大子集 M' 满足:

$$\forall e_1=(u_1,v_1), e_2=(u_2,v_2)\in M' \implies u_1\neq u_2 \text{ and } v_1\neq v_2$$

则 M' 是 G 的一个匹配，从而 $|M'|<|M|$，C' 中剩下的边只能多覆盖 G 中的一个顶点，否则我们可以构造一个更大的匹配，从而我们有:

$$|V_1|+|V_2| = 2|M|+|C\setminus M| > 2|M'|+|C'\setminus M'| = |V_1|+|V_2|$$

矛盾。 □