算法设计与分析 Week 15

第十五周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 12 月 18 日

1. QUADEQ 问题是讨论二次方程是否存在 $0/1$ 解的问题。具体的来说，其一个实例包含 n 个变量，m 个方程，每个方程如下形式：

$$\sum_{i,j\in[n]} a_{ij}x_ix_j = b$$

这里加法是在有限域 $\mathbb{F}_2$ 上定义的，即只有 0 和 1 两个元素，并且加法满足：

$$\begin{aligned} 0+0&=0 \qquad & 0+1&=1 \\ 1+0&=1 \qquad & 1+1&=0 \end{aligned}$$

请证明 QUADEQ 问题是 NP 完全的。

解答. 验证一个解是否满足上述方程显然是多项式时间的，因此 QUADEQ 问题在 NP 中。

下面我们将 3SAT 问题规约到 QUADEQ 问题。给定一个 3SAT 问题,我们可以将其转化为 QUADEQ 问题如下：

- 对每个变量 x 和每个子句 C，我们分别引入一个变量 u_x 和 u_C。
- 对于每个子句 $C = n_1 \wedge n_2 \wedge n_3$，我们引入如下的方程：

$$u_C\varphi(n_1) + u_C\varphi(n_2) + u_C\varphi(n_3) = 1$$

其中 $\varphi(n_i)$ 的定义为：

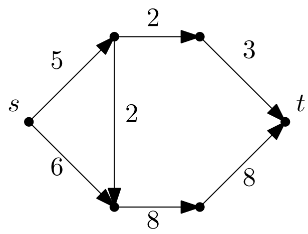
$$\varphi(n_i) = \begin{cases} u_x & \text{if } n_i = x \\ 1-u_x & \text{if } n_i = \neg x \end{cases}$$

最后注意到 $x = x^2 (\mod 2)$，我们将方程里出现 u_C 一次的项换成 u_C^2 即可。

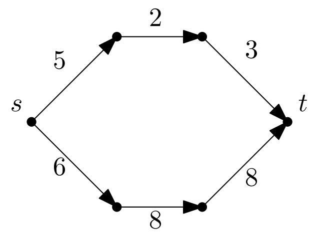
上述最终得到了一个 QUADEQ 问题的实例，可以验证，该方程组有解当且仅当原 3SAT 问题是可满足的。因此 QUADEQ 问题是 NP 完全的。 □

2. 一个**阻塞流**指的是流网络 $G = (V, E, c)$ 上的一个流 f，使得如果对任意 G 中 s 到 t 的路径 π，G 中存在一条边 $e \in \pi$，使得 $f(e) = c(e)$。用例子说明，在剩余图的层次图中的一个阻塞流并不一定是剩余图中的阻塞琉。

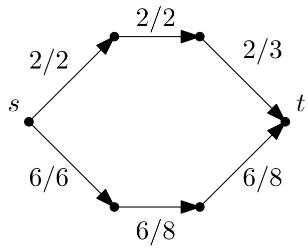
解答. 我们考虑如下的例子：



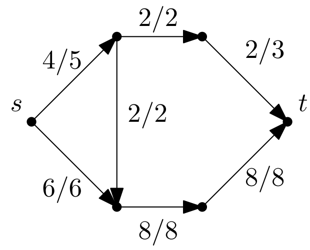
G_1



G_2



G_3



G_4

上图 G_1 是一个流网络，边上的值代表了相应的容量限制。特别的我们令流量 f 为 0，从而此时的剩余图就是 G_1 本身。

G_2 是其相应的层次图。不难发现，G_3 给出了其上的阻塞流，但很显然该阻塞流不是剩余图 G_1 上的阻塞流，其阻塞流如 G_4 所示。主要原因在于，层次图中只反映了当前剩余图中最短路径的增广路径信息。 □

3. 苦荞麦产自堪萨斯和墨西哥，主要的消费地则在纽约和加州。堪萨斯和墨西哥的苦荞麦产量分别为 15 和 8。同时，纽约和加州的消费量分别为 10 和 13。根据运输路线不同，每单位苦荞麦的运费依次为: 墨西哥至纽约 4 元，墨西哥至加州 1 元，堪萨斯至纽约 2 元，堪萨斯至加州 3 元。

   请写出一个线性规划, 判断每个产地应该分别向不同的消费地运输多少苦荞麦, 使得总运费最少。

解答. 我们定义如下 4 个变量:

- x_1 表示堪萨斯向纽约运输的苦荞麦数量
- x_2 表示堪萨斯向加州运输的苦荞麦数量
- x_3 表示墨西哥向纽约运输的苦荞麦数量
- x_4 表示墨西哥向加州运输的苦荞麦数量

则该问题可以转化为如下的线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_3 \geqslant 10 \\
& x_2 + x_4 \geqslant 13 \\
& x_1 + x_2 \leqslant 15 \\
& x_3 + x_4 \leqslant 8 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

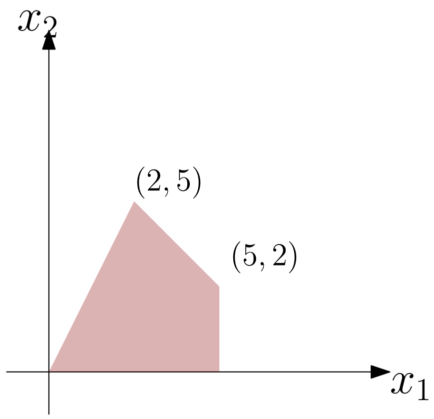
□

4. 考虑如下的线性规划:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 5x_1 - 2x_2 \geqslant 0 \\
& x_1 + x_2 \leqslant 7 \\
& x_1 \leqslant 5 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

请绘出其可行区域并指出最优解。

解答. 其可行区域如下图所示:



从而其最优解为 $x_1 = 5, x_2 = 2$，最优值为 31。 □