

第三周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 9 月 28 日

截止日期 2023 年 10 月 9 日晚 24: 00

1. 考虑算法 SlowMinmax，它是将算法 Minmax 的检验条件 $\text{if high} - \text{low} = 1$ 修改为 $\text{if high} = \text{low}$ ，并对此算法做一些相应改变而得出的。这样，在算法 SlowMinmax 中，当输入数组的大小为 1 时，递归停止。计算由此算法找出数组 $A[1, \dots, n]$ 中的最大值和最小值所需要的比较次数，这里 n 是 2 的幂。并解释为什么此算法的比较次数大于算法 Minmax 的比较次数。

Hint: 在这种情形下，初始条件是 $C(1) = 0$

2. 对于某个整数 $g \geq 3$ ，用 g 来表示算法 Select 中每组的规模，导出用 g 表示的算法的运行时间。当 $g = 3, 7, 9, 11$ 时，哪个选择可以保证算法在最坏情况下执行的次数依旧是 $\Theta(n)$?

3. 有个木匠有一堆混合的 N 个螺母和 N 个螺栓。他希望能找到相应的螺母和螺栓配对。每个螺母只能配对一个螺栓，每个螺栓也只能配对一个螺母。通过将螺母和螺栓组合在一起，木匠可以看出哪个更大，但木匠不能直接比较两个螺母或两个螺栓。

设计一种算法来解决这个问题，该算法使用 $N \log N$ 次比较（以概率方式）。

Hint: 好好利用 Quicksort 中的划分过程。

4. 求出唯一的 4 次多项式 p ，满足 $p(1) = 2, p(2) = 1, p(3) = 0, p(4) = 4, p(5) = 0$ 。

5. 给出一个有序数组 $A[1, \dots, n]$ ，其元素各不相同，请给出一个 $O(\log n)$ 的算法，找出一个下标 i ，使得 $A[i] = i$ 。如果不存在这样的 i ，则返回 -1 。

6. 求解下列递推式，并针对每个递推式给出一个 Θ 界限：

(1) $T(n) = 5T(\frac{n}{3}) + n$

(2) $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3$

(3) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + 1$

7. 给定一个数组 $A[1, \dots, n]$ ，请设计一个算法，找出 A 中和最大的非空连续子数组。例如，如果 $A = [-2, 1, -3, 4, -1, 2, 1, -5, 4]$ ，则和最大的非空连续子数组为 $[4, -1, 2, 1]$ ，其和为 6，并分析你设计的算法的时间复杂性。

8. 3-SAT 问题的定义如下：其实例是一个合取范式，其中每个子句都包含三个变量的析取。例如， $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \neg x_5 \vee x_6)$ ，其中 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 是布尔变量。3-SAT 问题是判断是否存在一种赋值方式，使得合取范式为真。

在课程的后半段，我们会知道该问题是一个 NP 完全问题。现在，考虑一个其受限的版本，假设将其变量从 $1, \dots, n$ 编号，公式中的每个子句包含变量的编号差异在 ± 8 以内。请给出一个线性时间的算法，判断这样的公式是否是可满足的。