

## 第三周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 9 月 28 日

**截止日期** 2023 年 10 月 9 日晚 24: 00

1. 考虑算法 SlowMinmax, 它是将算法 Minmax 的检验条件  $\text{if high} - \text{low} = 1$  修改为  $\text{if high} = \text{low}$ , 并对此算法做一些相应改变而得出的。这样, 在算法 SlowMinmax 中, 当输入数组的大小为 1 时, 递归停止。计算由此算法找出数组  $A[1, \dots, n]$  中的最大值和最小值所需要的比较次数, 这里  $n$  是 2 的幂。并解释为什么此算法的比较次数大于算法 Minmax 的比较次数。

**Hint:** 在这种情形下, 初始条件是  $C(1) = 0$ 

2. 对于某个整数  $g \geq 3$ , 用  $g$  来表示算法 Select 中每组的规模, 导出用  $g$  表示的算法的运行时间。当  $g = 3, 7, 9, 11$  时, 哪个选择可以保证算法在最坏情况下执行的次数依旧是  $\Theta(n)$ ?
3. 有个木匠有一堆混合的  $N$  个螺母和  $N$  个螺栓。他希望能找到相应的螺母和螺栓配对。每个螺母只能配对一个螺栓, 每个螺栓也只能配对一个螺母。通过将螺母和螺栓组合在一起, 木匠可以看出哪个更大, 但木匠不能直接比较两个螺母或两个螺栓。

设计一种算法来解决这个问题, 该算法使用  $N \log N$  次比较 (以概率方式)。**Hint:** 好好利用 Quicksort 中的划分过程。

4. 求出唯一的 4 次多项式  $p$ , 满足  $p(1) = 2, p(2) = 1, p(3) = 0, p(4) = 4, p(5) = 0$ 。
5. 给出一个有序数组  $A[1, \dots, n]$ , 其元素各不相同, 请给出一个  $O(\log n)$  的算法, 找出一个下标  $i$ , 使得  $A[i] = i$ 。如果不存在这样的  $i$ , 则返回  $-1$ 。
6. 求解下列递推式, 并针对每个递推式给出一个  $\Theta$  界限:

(1)  $T(n) = 5T(\frac{n}{3}) + n$

(2)  $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3$

(3)  $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + 1$

7. 给定一个数组  $A[1, \dots, n]$ , 请设计一个算法, 找出  $A$  中和最大的非空连续子数组。例如, 如果  $A = [-2, 1, -3, 4, -1, 2, 1, -5, 4]$ , 则和最大的非空连续子数组为  $[4, -1, 2, 1]$ , 其和为 6, 并分析你设计的算法的时间复杂性。
8. 3-SAT 问题的定义如下: 其实例是一个合取范式, 其中每个子句都包含三个变量的析取。例如,  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \neg x_5 \vee x_6)$ , 其中  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  是布尔变量。3-SAT 问题是判断是否存在一种赋值方式, 使得合取范式为真。

在课程的后半段, 我们会知道该问题是一个 NP 完全问题。现在, 考虑一个其受限的版本, 假设将其变量从  $1, \dots, n$  编号, 公式中的每个子句包含变量的编号差异在  $\pm 8$  以内。请给出一个线性时间的算法, 判断这样的公式是否是可满足的。