算法设计与分析 Week 5

第五周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 10 月 12 日

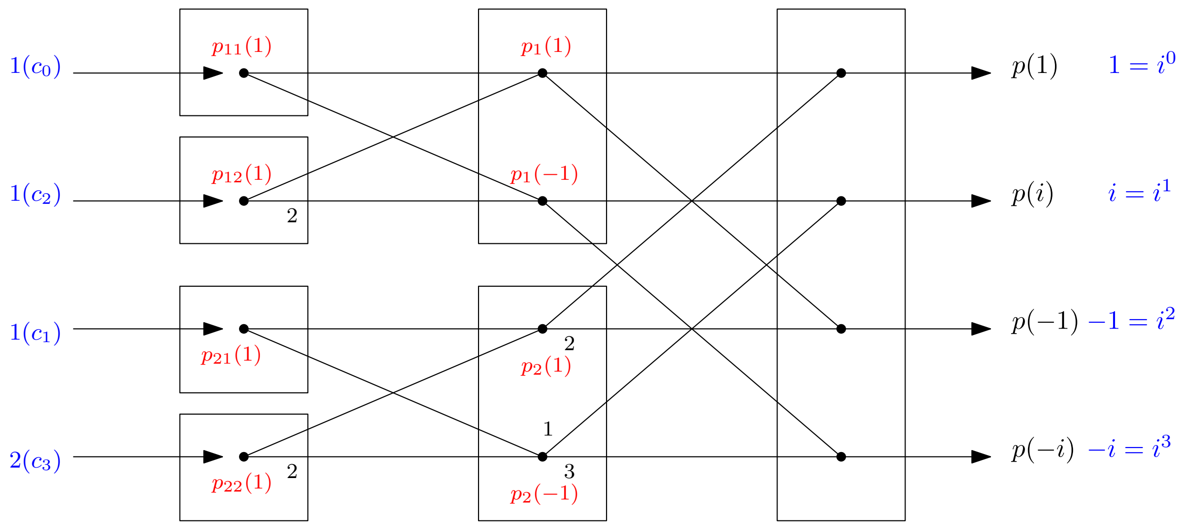
1. 我们再通过一个具体的例子来理解 FFT 的内部细节。考虑多项式 $p(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3$，我们计算其在 $i, -1, -i, 1$ 处的值 (就是 $z^4 = 1$ 的四个单位根)。注意到:

$$p(x) = (1 + x^2) + (x + 2x^3) = p_1(x^2) + xp_2(x^2)$$

其中 $p_1(x) = 1 + x$ 和 $p_2(x) = 1 + 2x$。从而我们可以通过计算 $p_1(x), p_2(x)$ 在 $1, -1$ 的值来得到 $p(x)$ 在 $i, -1, -i, 1$ 处的值。更进一步，比如考虑 $p_2(x)$，其可以表示为:

$$p_2(x) = 1 + 2x = 1 + x \cdot 2$$

令 $p_{21}(x) = 1, p_{22}(x) = 2$，则计算 $p_2(x)$ 在 $1, -1$ 的值等于计算 $p_{21}(x), p_{22}(x)$ 在 1 的值。此时需要计算的点只剩了 1 一处，直接计算 $p_{21}(1), p_{22}(1)$ 即可。同理可通过 $p_{11}(x)$ 和 $p_{12}(x)$ 在 1 处的值来得到 $p_1(x)$ 在 $-1, 1$ 处的值，进而可以得到 $p(x)$ 在 $i, -1, -i, 1$ 处的值。上述过程可用如下的图来进行表示:



可以看到:

- 红字来表示出了每个点所算对应算出的值。
- 图中的直线表示了值的传输过程，直线上的数字表示需要乘以相应的权重，如 2 表示需要乘以 i^2，则每个点的值由传输进来的值相加而成。以 $p(-i)$ 为例 (最右侧最下方的黑点)，其的值为 $p_1(-1) + i^3 \cdot p_2(-1)$。
- 分解到最后的多项式 (最左边) 就是原多项式熵的系数，我们用蓝色的字来表示，其中 c_i 表示 $p(x)$ 中 x^i 的系数。

- 可以看到，其与右边单位根的次数在二进制表示下有镜面对称的性质。

请仿照上述思路，表示利用 FFT 计算多项式 $q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + x^7$ 在 $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^7$ 这 7 个点的过程。其中 $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$，也就是满足 $z^8 = 1$ 的单位根。

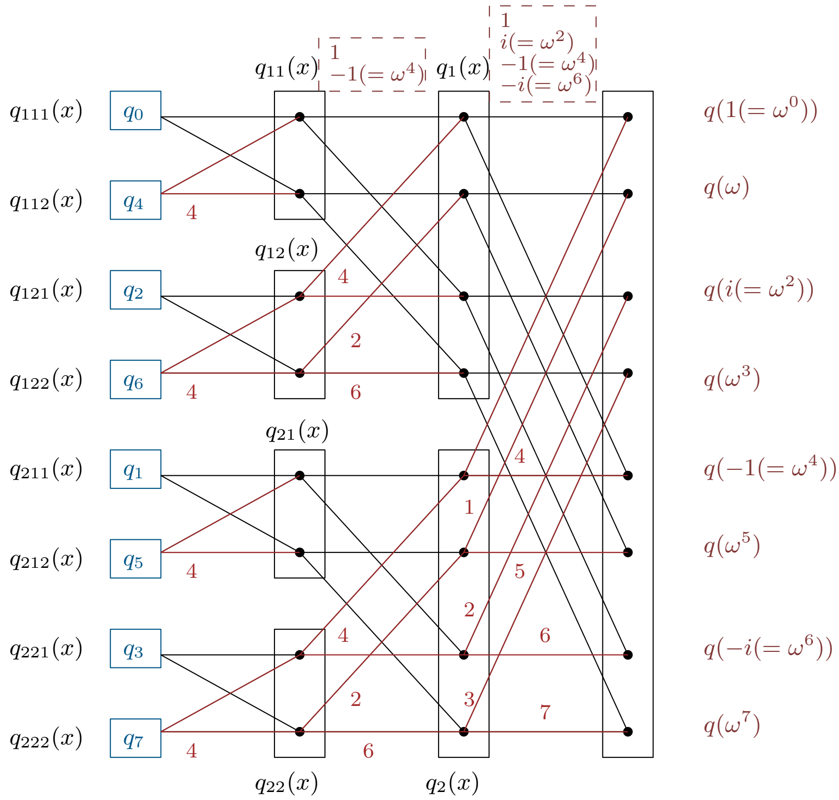
解答. $q(x)$ 在 FFT 下的计算可分解为如下的流程:

(1) $q_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3$，$q_2(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3$ 在 $1, \omega^2, \omega^4, \omega^6 (= 1, i, -1, -i)$ 处的值。

(2) $q_{11}(x) = 1 + x, q_{12}(x) = 1 + x$，$q_{21}(x) = 1 + 2x$，$q_{22}(x) = 1 + x$ 在 $1, \omega^4 (= 1, -1)$ 处的值。

(3) $q_{111}(x) = 1, q_{112}(x) = 1$，$q_{121}(x) = 1, q_{122}(x) = 1$，$q_{211}(x) = 1, q_{212}(x) = 2$，$q_{221}(x) = 1, q_{222}(x) = 1$ 在 1 处的值。

具体运算过程可如下图所示，我们用 $q_0, \ldots, q_7$ 表示对应的系数 (尽管除了 $q_5 = 2$ 其他都是 1)，即 $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_7 x^7$:



最终可得:

$$
\begin{aligned}
q(1) &= q_1(1) + q_2(1) \\
&= (q_{11}(1) + q_{12}(1)) + (q_{21}(1) + q_{22}(1)) \\
&= ((q_{111}(1) + q_{112}(1)) + (q_{121}(1) + q_{122}(1))) + ((q_{211}(1) + q_{212}(1)) + (q_{221}(1) + q_{222}(1))) \\
&= ((1+1) + (1+1)) + ((1+2) + (1+1)) = 9 \\
q(\omega) &= q_1(\omega^2) + \omega \cdot q_2(\omega^2) \\
&= (q_{11}(-1) + \omega^2 \cdot q_{12}(-1)) + \omega(q_{21}(-1) + \omega^2 \cdot q_{22}(-1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (q_{111}(1) + \omega^4 \cdot q_{112}(1)) + \omega^2(q_{121}(1) + \omega^4 \cdot q_{122}(1)) + \omega((q_{211}(1) + \omega^4 \cdot q_{212}(1)) \\
&+ \omega^2(q_{221}(1) + \omega^4 \cdot q_{222}(1))) \\
&= (1-1) + \omega^2(1-1) + \omega((1-2) + \omega^2(1-1)) = -\omega \\
q(\omega^2) &= q_1(-1) + \omega^2 \cdot q_2(-1) \\
&= (q_{11}(1) + \omega^4 \cdot q_{12}(1)) + \omega^2(q_{21}(1) + \omega^4 \cdot q_{22}(1)) \\
&= ((q_{111}(1) + q_{112}(1)) + \omega^4(q_{121}(1) + q_{122}(1))) + \omega^2((q_{211}(1) + q_{212}(1)) \\
&+ \omega^4(q_{221}(1) + q_{222}(1))) \\
&= (1+1) - (1+1) + \omega^2((1+2) - (1+1)) = \omega^2 \\
q(\omega^3) &= q_1(-i) + \omega^3 \cdot q_2(-i) \\
&= (q_{11}(-1) + \omega^6 \cdot q_{12}(-1)) + \omega^3(q_{21}(-1) + \omega^6 \cdot q_{22}(-1)) \\
&= ((q_{111}(1) + \omega^4 \cdot q_{112}(1)) + \omega^3(q_{121}(1)) + \omega^4 \cdot q_{122}(1)) + \omega^3((q_{211}(1) + \omega^4 \cdot q_{212}(1)) \\
&+ \omega^6(q_{221}(1) + \omega^4 \cdot q_{222}(1))) \\
&= (1-1) + \omega^3(1-1) + \omega^3((1-2) + \omega^6(1-1)) = -\omega^3 \\
q(\omega^4) &= q_1(1) + \omega^4 \cdot q_2(1) \\
&= (q_{11}(1) + q_{12}(1)) + \omega^4(q_{21}(1) + q_{22}(1)) \\
&= (q_{111}(1) + q_{112}(1)) + (q_{121}(1) + q_{122}(1)) + \omega^4((q_{211}(1) + q_{212}(1)) + (q_{221}(1) + q_{222}(1))) \\
&= (1+1) + (1+1) - ((1+2) + (1+1)) = -1 (= \omega^4) \\
q(\omega^5) &= q_1(\omega^2) + \omega^5 \cdot q_2(\omega^2) \\
&= (q_{11}(-1) + \omega^2 \cdot q_{12}(-1)) + \omega^5(q_{21}(-1) + \omega^2 \cdot q_{22}(-1)) \\
&= ((q_{111}(1) + \omega^4 \cdot q_{112}(1)) + \omega^2(q_{121}(1) + \omega^4 \cdot q_{122}(1))) + \omega^5((q_{211}(1) + \omega^4 \cdot q_{212}(1)) \\
&+ \omega^2(q_{221}(1) + \omega^4 \cdot q_{222}(1))) \\
&= (1-1) + \omega^2(1-1) + \omega^5((1-2) + \omega^2(1-1)) = \omega (= -\omega^5) \\
q(\omega^6) &= q_1(-1) + \omega^6 \cdot q_2(-1) \\
&= (q_{11}(1) + \omega^4 \cdot q_{12}(1)) + \omega^6(q_{21}(1) + \omega^4 \cdot q_{22}(1)) \\
&= ((q_{111}(1) + q_{112}(1)) + \omega^4(q_{121}(1) + q_{122}(1))) + \omega^6((q_{211}(1) + q_{212}(1)) \\
&+ \omega^4(q_{221}(1) + q_{222}(1))) \\
&= (1+1) - (1+1) + \omega^6((1+2) - (1+1)) = -\omega^2 (= \omega^6) \\
q(\omega^7) &= q_1(-i) + \omega^7 \cdot q_2(-i) \\
&= (q_{11}(-1) + \omega^6 \cdot q_{12}(-1)) + \omega^7(q_{21}(-1) + \omega^6 \cdot q_{22}(-1)) \\
&= ((q_{111}(1) + \omega^4 \cdot q_{112}(1)) + \omega^3(q_{121}(1) + \omega^4 \cdot q_{122}(1))) + \omega^7((q_{211}(1) + \omega^4 \cdot q_{212}(1)) \\
&+ \omega^6(q_{221}(1) + \omega^4 \cdot q_{222}(1))) \\
&= (1-1) + \omega^3(1-1) + \omega^7((1-2) + \omega^6(1-1)) = \omega^3 (= -\omega^7)
\end{aligned}
$$

$\square$

Remark 0.1

这里是要记住 ω 的运算性质，具体来说：

$$\omega^2 = i,\ \omega^4 = -1,\ \omega^6 = -i,\ \omega^8 = \omega^0 = 1$$

希望通过这个看上去略微繁琐的计算过程可以帮助同学们理解 FFT 的内部细节。

2. 请给出利用第四节课件中的 $PolynomialMultiplication(A, B)$ 计算多项式 $1+x+2x^2$ 和 $2+3x$ 的具体运算过程，请具体指明所选用的点以及中间的运算结果。

解答. $PolynomialMultiplication(A, B)$ 一共分为四个阶段：

- **选择阶段**
  注意到 A 和 B 乘起来是一个次数为 3 的多项式，所以我们选择 $z^4 = 1$ 的四个单位根，即 $1, i, -1, -i$.(选择 $\geqslant 3+1$ 的最小的 2^k 个单位根)
- **计算阶段**
  利用 FFT 分别计算 A 和 B 在 $1, i, -1, -i$ 这四个点的值，得到 $A(1), A(i), A(-1), A(-i)$ 和 $B(1), B(i), B(-1), B(-i)$，可得：、

$$A(1) = 4, A(i) = i - 1, A(-1) = 2, A(-i) = -i - 1$$
$$B(1) = 5, B(i) = 2 + 3i, B(-1) = -1, B(-i) = 2 - 3i$$

- **乘法阶段**
  计算 $A(z)B(z)$ 在 $1, i, -1, -i$ 这四个点的值，即其乘积 C 在这四个点 $C(1), C(i), C(-1), C(-i)$ 的值：

$$C(1) = A(1)B(1) = 20$$
$$C(i) = A(i)B(i) = -i - 5$$
$$C(-1) = A(-1)B(-1) = -2$$
$$C(-i) = A(-i)B(-i) = i - 5$$

- **插值阶段**
  利用 $C(1), C(i), C(-1), C(-i)$ 还原 C 中的系数 c_0, c_1, c_2, c_3，这一部分调用的也是 FFT，即令：

$$D(x) = C(1) + C(i)x + C(-1)x^2 + C(-i)x^3$$

  利用 FFT 计算其在 $1, -i, -1, i$ 上的值，再乘以 $\frac{1}{4}$ 便是 c_0, c_1, c_2, c_3 的值，最终可得：

$$c_0 = \frac{1}{4} \cdot D(1) = 2$$
$$c_1 = \frac{1}{4} \cdot D(-i) = 5$$
$$c_2 = \frac{1}{4} \cdot D(-1) = 7$$
$$c_3 = \frac{1}{4} \cdot D(i) = 6$$

即最终多项式为:

$$C(x) = 2 + 5x + 7x^2 + 6x^3$$

□

Remark 0.2

这里点的顺序是按 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ 而定的，还需注意 $i^{-1} = -i$.

3. 分别说明将下列数组转化为最小堆和最大堆的步骤:

(1) $A = [3, 7, 2, 1, 9, 8, 6, 4]$.

解答. 数组已经可以看成是一个几乎完全的二叉树 (complete binary tree)，修改成最大堆的步骤:

(1) 从最下最右非叶子节点开始，即 1, 其比其叶子节点 4 小，从而进行 SIFTDOWN，数组变为 $[3, 7, 2, 4, 9, 8, 6, 1]$.

(2) 继续调整，2 比其叶子节点 8 小，进行 SIFTDOWN，数组变为 $[3, 7, 8, 4, 9, 2, 6, 1]$.

(3) 继续调整，7 比其叶子节点 9 小，进行 SIFTDOWN，数组变为 $[3, 9, 8, 4, 7, 2, 6, 1]$.

(4) 继续调整，3 比其叶子节点 9 小，进行 SIFTDOWN，数组变为 $[9, 7, 8, 4, 3, 2, 6, 1]$. 这一步 SIFTDOWN 会向下调整到叶子节点，更改两次。

(5) $[9, 7, 8, 4, 3, 2, 6, 1]$ 是一个最大堆。

修改成最小堆的步骤:

(1) 从最下最右非叶子节点开始，即 1, 其比其叶子节点 4 小，从而不需要调整。

(2) 继续调整，2 比其叶子节点 $6, 8$ 小，也不需要调整。

(3) 继续调整，7 比其叶子节点 1 大，进行 SIFTDOWN，数组变为 $[3, 1, 2, 7, 9, 8, 6, 4]$.

(4) 继续调整，3 比其叶子节点 1 大，进行 SIFTDOWN，数组变为 $[1, 3, 2, 7, 9, 8, 6, 4]$.

(5) $[1, 3, 2, 7, 9, 8, 6, 4]$ 是一个最小堆。

□

4. 从一个最大堆中找到最小键值可能有多快?

解答. 由于最大堆的最小值一定在叶子节点上，并且任何一个叶子节点都有可能是最小值，所以我们必须要遍历所有的叶子节点，才能确定其中的最小值。注意到叶子节点个数可能有 $\frac{n}{2}$ 个，因此时间复杂度为 $O(n)$。 □

5. (k-归并) 给出一个 $O(n \lg k)$ 的算法将 k 个排好序的数组合并成一个排好序的数组。假设总共有 n 个元素。

Hint: 请考虑利用最小堆进行合并。

解答. 算法思路在于我们每次对这 k 个有序数组取出每个数组当前最小的元素，构建最小堆，再不断弹出最小元素即可。

(1) 首先我们将这 k 个数组的第一个元素构建成一个最小堆，这一步的时间复杂度为 $O(k)$.
(2) 然后我们弹出最小元素，将其所在数组的下一个元素加入到最小堆中，这一步的时间复杂度为 $O(\log k)$.
(3) 不断重复上述过程, 直到最小堆为空, 这一共要执行 n 轮, 所以总的时间复杂度为 $O(n \log k)$.

根据上述讨论，该算法的时间复杂性为 $O(n \log k)$. □