

第六周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 10 月 28 日

截止日期 2023 年 10 月 23 日晚 24: 00(待定!)

1. 假设 Find 和 Union 操作是利用按秩合并的方式进行的, 请给出一个长度为 n 的 Find 和 Union 序列, 使得其确实需要 $\Theta(n \log n)$ 的时间。这里假定元素集合是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 。比如如果序列是 $\text{Find}(1), \dots, \text{Find}(n)$, 显然该序列只需要 $O(n)$ 的时间, 不符合题目的要求。
2. 在下图中运行深度优先搜索; 如果需要在多个顶点间进行选择的情况, 按顶点的字母序进行。并给出每个顶点的 pre 和 post 值, 这里 pre 和 post 是用一个序列维护的。

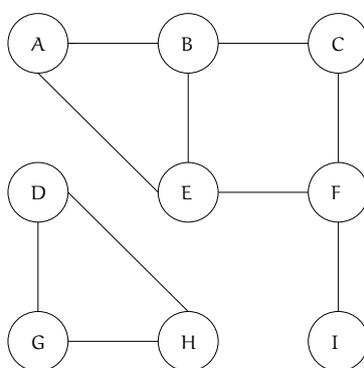


图 1: 第 2 题图

3. 有向图 $G = (V, E)$ 的反转是一个新的有向图 $G^R = (V, E^R)$, 即图 G^R 与图 G 有相同的顶点集合, 不过图 G^R 将 G 中所有边的方向反转过来, 即有 $E^R = \{(u, v) \mid (v, u) \in E\}$ 。假定图用邻接表表示, 请给出一个线性时间算法, 将图的反转表示出来。
4. 现有三个容器, 容积分别为 10 升、7 升和 4 升。其中, 7 升和 4 升的容器是满的, 正开始向外排水, 而 10 升的容器此时是空的。当前我们只能进行一种操作: 将一个容器的水注入另一个容器, 注水操作只能在源容器已空或者目标容器已满的情况下停止。问题是, 是否存在一个合理的注水顺序, 使 7 升或 4 升的容器中恰好剩余 2 升水。
 - 将该问题建模成一个图中的问题。给出模型中图的精确定义, 并给出针对上述问题在该图里需要解决的问题。
 - 给出一个算法来解决这个问题。

Hint: 三个容器当前水的容量可以看成是一个三元组 (a, b, c) , 是否可以将其视作图上的一个节点?