

## 第六周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 10 月 25 日

1. 假设 Find 和 Union 操作是利用按秩合并的方式进行的，请给出一个长度为  $n$  的 Find 和 Union 序列，使得其确实需要  $\Theta(n \log n)$  的时间。这里假定元素集合是  $\{1, 2, \dots, n\}$ 。比如如果序列是  $\text{Find}(1), \dots, \text{Find}(n)$ ，显然该序列只需要  $O(n)$  的时间，不符合题目的要求。

**解答.** 这个实例的构造在于要让树的高度尽可能平均的增加，所以序列如下：

- (1)  $\text{Union}(1, 2), \text{Union}(3, 4), \dots, \text{Union}(n - 1, n)$
- (2)  $\text{Union}(1, 3), \text{Union}(5, 7), \dots, \text{Union}(n - 3, n - 1)$
- (3)  $\text{Union}(1, 5), \text{Union}(9, 13), \dots, \text{Union}(n - 7, n - 3)$
- (4) ...
- (5)  $\text{Union}(1, 1 + 2^{k-1}), \dots, \text{Union}(n - 2^k + 1, n - 2^{k-1} + 1)$
- (6)  $\text{Find}(1), \text{Find}(1 + 2^{k-1}), \dots, \text{Find}(n - 2^{k-2} + 1)$

由于每次 Union 操作都是按秩合并，所以每次合并的两个集合的秩都是相同的，从而每次合并后的秩都是原来的秩加一，因此上述第  $k$  轮后每次合并后的树的高度为  $k$ ，因此在第  $k$  次操作过后，所以每次 Union 操作的时间复杂度都是  $\Theta(\log k)$ ，所以总的时间复杂度是  $\Theta(n \log n)$ 。同时不难验证，这是一个  $n$  次的 Find 和 Union 序列。 □

### Remark 0.1

事实上，如果题目要求  $O(n)$  的操作序列，叙述可以简单一些，但现在为了严格构出一个  $n$  轮的操作序列，所以需要仔细计算次数。事实上我们只需要保证在  $O(\log n)$  次数的 Find 操作需要执行某个  $n$  的倍数次就可以了，哪怕这个倍数可能是个很小的分数。

2. 在下图中运行深度优先搜索；如果需要在多个顶点间进行选择的情况，按顶点的字母序进行。并给出每个顶点的 pre 和 post 值，这里 pre 和 post 是用一个序列维护的。

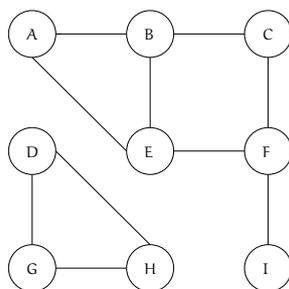


图 1: 第 2 题图

解答. 如下图所示:

□

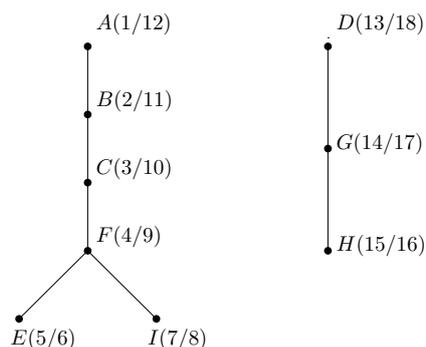


图 2: 第 2 题图的 DFS 遍历

3. 有向图  $G = (V, E)$  的反转是一个新的有向图  $G^R = (V, E^R)$ , 即图  $G^R$  与图  $G$  有相同的顶点集合, 不过图  $G^R$  将  $G$  中所有边的方向反转过来, 即有  $E^R = \{(u, v) \mid (v, u) \in E\}$ . 假定图用邻接表表示, 请给出一个线性时间算法, 将图的反转表示出来。

**解答.** 一个非常简单的思路就是利用空间换取时间。我们可以提前准备好额外的  $|V|$  个链表, 分别表示  $G^R$  中每个顶点的邻接表。然后遍历  $G$  中的每一条边  $(u, v)$ , 将  $u$  加入  $v$  的新的邻接表中。这样就可以在  $O(|V| + |E|)$  的时间内完成反转。 □

4. 现有三个容器, 容积分别为 10 升、7 升和 4 升。其中, 7 升和 4 升的容器是满的, 正开始向外排水, 而 10 升的容器此时是空的。当前我们只能进行一种操作: 将一个容器的水注入另一个容器, 注水操作只能在源容器已空或者目标容器已满的情况下停止。问题是, 是否存在一个合理的注水顺序, 使 7 升或 4 升的容器中恰好剩余 2 升水。

- 将该问题建模成一个图中的问题。给出模型中图的精确定义, 并给出针对上述问题在该图里需要解决的问题。
- 给出一个算法来解决这个问题。

Hint: 三个容器当前水的容量可以看成是一个三元组  $(a, b, c)$ , 是否可以将其视作图上的一个节点?

**解答.** 我们可以构造这样一张图  $G = (V, E)$ :

- $V = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq 10, 0 \leq b \leq 7, 0 \leq c \leq 4\}$
- $E = \{(a, b, c) \rightarrow (a', b', c') \mid (a', b', c') \text{ 是 } (a, b, c) \text{ 通过一次注水操作得到的状态}\}$

则问题可以转化为: 是否可以在图中从  $(0, 7, 4)$  出发, 到达形如  $(a, 2, c)$  或  $(a, b, 2)$  这样的点。

我们可以用深度优先搜索或者广度优先搜索来解决这个问题, 具体算法如下:

- (1) 从  $(0, 7, 4)$  出发进行深度优先搜索。
- (2) 搜索过程中, 若访问到形如  $(a, 2, c)$  或  $(a, b, 2)$  这样的点, 则返回 True.
- (3) 若回溯到  $(0, 7, 4)$  还没有找到, 则返回 False.

□