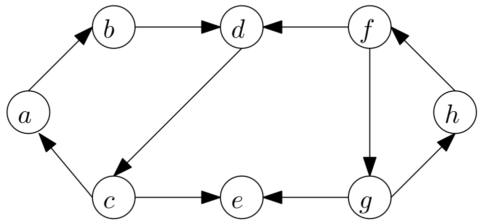
算法设计与分析 Week 7

第七周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 10 月 31 日

1. 请在下图所示的有向图上应用强连通分支的算法。



解答.

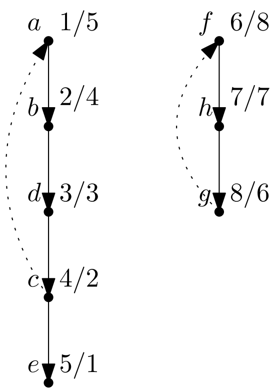
(1) 先在原图上进行 DFS，下图左侧是按字母序访问得到的 DFS 树。其 post 的逆序为：

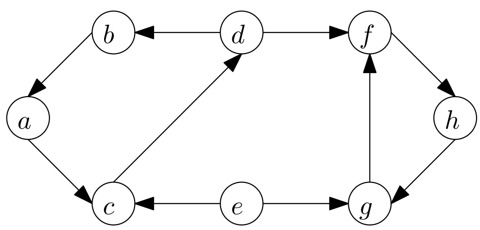
$$\mathrm{f},\ \mathrm{h},\ \mathrm{g},\ \mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{d},\ \mathrm{c},\ \mathrm{e}$$

(2) 依照上述顺序在原图的逆图 (下图右) 中进行 DFS，每个点出发的子树即为一个强连通分支。

- 从 f 出发能访问到的点为 $\{\mathrm{h},\mathrm{g}\}$，即 $\{\mathrm{f},\ \mathrm{g},\ \mathrm{h}\}$ 是一个强连通分支。
- 去除上述点后，还剩的点为 $\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{d},\mathrm{c},\mathrm{e}$。从 a 出发能访问到的点为 $\{\mathrm{c},\mathrm{d},\mathrm{b}\}$，即 $\{\mathrm{a},\mathrm{c},\mathrm{d},\mathrm{b}\}$ 是一个强连通分支。
- 剩下的点为 e，即 $\{\mathrm{e}\}$ 是一个强连通分支。

即强连通分支一共有 3 个，为 $\{\mathrm{f},\ \mathrm{g},\ \mathrm{h}\}$, $\{\mathrm{a},\mathrm{c},\mathrm{d},\mathrm{b}\}$, $\{\mathrm{e}\}$。





□

2. 给定一个无向图 G 和其中的一条边 e，请设计一个算法，判断图中是否存在一个包含 e 的环。分析你给出的算法的时间复杂性。

解答. 基本思路在于假设 e 的两个端点为 u 和 v，如果图中删去 e，u 和 v 不连通，则 e 不在环中；否则，e 在环中。算法简单描述如下:

(1) 构造图 $G' = (V, E')$ 满足 $E' = E \setminus \{e\}$。

(2) 在图 G' 从 u 出发进行 DFS，如果 DFS 能访问到 v，则 e 在环中；否则，e 不在环中。

□

3. 给定一个有向无环图 G 和两个顶点 s 和 t，请设计一个算法，计算所有从 s 到 t 的路径个数。

解答. 基本思路是先将 DAG 输出其拓扑序列，假设其拓扑序为 $v_1, \ldots, v_k$，定义 $P(j)$ 为 s 到 v_j 的路径数量，并且不妨令 $v_i = s$，$v_{i'} = t$。注意到:

$$P(k) = \begin{cases} 0 & k < i \\ 1 & k = i \\ \sum_{(v_j, v_k) \in E} P(j) & k > i \end{cases}$$

最终 $P(i')$ 即 s 到 t 的所有路径数量。算法流程如下:

(1) 计算 DAG 的拓扑序列 $v_1, \ldots, v_k$（对图进行 DFS 再根据 post 序逆序输出即可）

(2) 对每个点 v_j，根据上述公式依次计算 $P(j)$，其中 $j \in \{i, \ldots, k\}$。

(3) 输出 $P(i')$.

第一步的时间复杂度为 $O(|V| + |E|)$，第二步的时间复杂度为 $O(|V| + |E|)$，第三步的时间复杂度为 $O(1)$，因此总的时间复杂度为 $O(|V| + |E|)$. □

4. 给出一个线性时间的算法，找出有向图中一条路径长度为奇数的环。

Hint: 先考虑强连通的情况。

解答. 如果是在无向图中，直接 DFS 并交替染色即可。这一方法在有向图中不适用，因为边的方向可能不一致。我们先在强连通的有向图中考虑，注意到:

Lemma 0.1

在强连通的 n 个点的有向图中，一定有一条长度为 n 的圈经过所有的顶点。

因此，如果该图有奇数个顶点，那么一定有一条长度为奇数的圈。否则如果从 u 到 v 有一条偶数长的路径，则从 v 到 u 也有一条偶数长的路径。我们可以通过这个思路结合无向图中的处理方法，得到一个奇圈:

我们可以从任一点出发对图进行 DFS，并交替染黑和白色。不妨令初始点为 s，并且标记为白色，则:

- 被标记为黑色的点意味着从初始点出发有一条奇数长的路径。
- 被标记为白色的点意味着从初始点出发有一条偶数长的路径。

我们宣称，如果当前顶点访问到一个同色的顶点，则存在一个奇数圈。不妨假设这两个点为 u, v，则构造圈如下:

$$(s \to^* u) + (u \to v) + (v \to^* s)$$

其中 $s \to^* t$ 表示 s 到 t 的一条路径。注意到 u, v 都是同色的，因此有前面的讨论，存在一条都是奇数或者都是偶数的 s 到 u 和 v 到 s 的路径，因此上述圈是奇数的。同时我们注意到，如果图中存在一个奇圈，无论从哪个点开始 DFS 交替染色，一定会访问到相同染色的顶点。因此上述过程一定能在有奇圈的强连通有向图中找出一个奇圈。

现在考虑一般的情况，这只需注意到奇圈一定出现在有向图中的某个强连通分量上，因此我们只需利用强连通分量的算法求出其所有的强连通分量，再分别在强连通分量上执行上述算法即可。算法流程如下:

(1) 执行强连通分量算法得到其所有的强连通分量。

(2) 对每个强连通分量，若其只有奇数个点，则返回 Yes。

(3) 对其进行 DFS 并交替染色，若访问到同色的顶点，返回 Yes.

(4) 返回 No.

注意到上述每个过程都至多是线性的，因而这是一个线性时间算法。 □

Remark 0.2

(1) 事实上，上述过程也给出了具体的环的求法。

(2) 在考虑有向图上的问题中，先将图简化为强连通分量考虑是个常用手段。