

第八周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 10 月 31 日

截止日期 2023 年 11 月 6 日晚 24: 00

1. F. Lake 教授给出了一种在含负边的有向图中，求顶点 s 到顶点 t 的最短路径的算法。该算法描述如下：

给图中每条边的权重加一个足够大的常数，使得所有边的权重都为正数。然后用 Dijkstra 算法求解最短路径。最后，将求得的最短路径的长度减去添加的常数，即为原图中 s 到 t 的最短路径长度。

请问，该算法是否正确？如果正确，请证明；如果不正确，请给出一个反例。

2. 考虑这样一个有向图，其中所有的负边都是从 s 出发的边；除此之外的边的权重都是正数。请问，是否可以用 Dijkstra 算法求解从 s 到其他所有顶点的最短路径？如果可以，请证明；如果不可以，请说明原因。

Remark 0.1

这这里假设图中不存在负的环，即最短路径始终都是存在的。

3. 考虑一张没有权重的无向图，通常在这种图中，两个顶点之间不止有一条最短路径。现在请给出一个线性时间算法求出给定的顶点 u 到 v 之间的最短路径的数目。

4. 给定一个有权重的有向图 $G = (V, E, \omega)$ ，其权重可以为负，并且任意两个顶点之间的最短路径最多含有 k 条边，请给出一个 $O(k|E|)$ 的算法，找出从顶点 s 到顶点 t 的最短路径。

5. 设 $G = (V, E)$ 是一个无向图。图的着色是一个对 G 中顶点的颜色指派问题，使没有两个相邻顶点具有相同的颜色，着色问题是决定对图 G 着色所需要的最少颜色数。考虑下面的贪心方法，其试图解决着色问题。

- 令颜色为 $1, 2, 3, \dots$
- 尽可能的用颜色 1 对顶点着色。这里尽可能的意思是，使用颜色 1 对尽可能多的顶点着色。
- 在剩下的顶点中尽可能的用颜色 2 对顶点着色。
- 再在剩下的顶点中尽可能的用颜色 3 对顶点着色，以此类推，直到所有的顶点都被染色。

请证明，上述贪心算法并不是总能得到最少的着色方案。