

第九周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 11 月 6 日

截止日期 2023 年 11 月 13 日晚 24: 00

1. 如果图含有负权重, Prim 算法是否能给出正确的最小生成树? 请证明你的结论。
2. (最大生成树) 请给出一个算法, 求出一个无向图的最大生成树, 即权重最大的生成树。
3. (长途旅行) 假设您准备开始一次长途旅行。以 0 英里为起点, 一路上一共有 N 座旅店, 距离起点的英里数分别为 $a_1 < a_2 < \dots < a_N$ 。旅途中, 您只能在这些旅店中停留, 当然在哪停留完全由您决定。最后一座旅店 a_N 是您的终点。

理想情况下, 您每天可以行进 200 英里, 不过考虑到旅店的实际距离, 有时候可能还达不到这么远。假设某天您走了 x 英里, 那么您将受到 $(200 - x)^2$ 的惩罚。您需要计划好行程, 使得总的惩罚-每天所受惩罚的总和最小。请给出一个高效的算法, 来确定一路上最优的停留位置。

4. (最长回文子序列) 如果一个子序列从左向右和从右向左读都一样, 则称之为回文。例如, 序列:

A, C, G, T, G, T, C, A, A, A, A, T, C, G

有很多回文子序列, 如 A, C, G, C, A 和 A, A, A, A。请设计一个 $O(n^2)$ 时间的算法, 对于输入一个长度为 n 的序列, 找出其最长回文子序列的长度。

5. 我们考虑一个新的方法来得到最小生成树:
 - (1) 请证明如下性质: 选择图中任何一个环, 删除其中权重最大的边, 得到的图的最小生成树仍然是原图的最小生成树。
 - (2) 考虑如下的算法:

算法:MST-DeleteCycle

- (i) 将图中的边按照权重从大到小排序。
- (ii) 按排好的顺序考虑每一条边, 如果这条边在图中形成了环, 则删除这条边。
- (iii) 直到图中没有环为止。返回剩下的图。

请证明算法的正确性。

- (3) 注意到, 判断一条边是否在某个圈里我们已经在上次作业里出现过, 该目标可以在线性时间内完成。基于此信息请分析算法的时间复杂度。