

第十周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 11 月 13 日

截止日期 2023 年 11 月 20 日晚 24: 00

1. 对于任意给定的正整数 M , 请给出三个矩阵相乘的例子, 它们的一种乘法顺序所需要的数量乘法的次数至少是另一种顺序的 M 倍。

2. 回顾贪心算法中我们讲到的货币兑换问题。有一个货币系统, 它有 n 种硬币, 面值分别为 $v_1 = 1, v_2, \dots, v_n$ 。现在需要兑换价值为 y 的钱, 使得硬币的数量最少。之前提到过这个问题贪心算法不一定能给出最优解, 现在请设计一个高效的算法解决这个问题。

3. 请对旅行商问题设计一个动态规划算法，这里旅行商问题指的是：给定 n 个城市和一个 $n \times n$ 的距离矩阵 D ，其中 $D[i, j]$ 表示从城市 i 到城市 j 的距离，旅行商要从某个城市出发，经过每个城市恰好一次，最后回到出发的城市，问旅行商的最短路线是什么？请给出算法的时间复杂度。

4. 为了降低背包问题运行的时间界限 $O(nW)$ ，我们尝试用这样的思路，我们使用一个大数 K 将容量 W 和每件物品的体积 w_i 都缩小 K 倍。具体来说，令 $W \leftarrow \lceil \frac{W}{K} \rceil$ ， $w_i \leftarrow \lceil \frac{w_i}{K} \rceil$ ；再在这个背包问题的新实例上运行我们提出的解决背包问题的算法。

(1) 现在算法的时间复杂度是多少？

(2) 这样子的策略其实并不能总得到原实例的最优解，请给出一个反例。

5. 请对如下问题给出一个 $O(nt)$ 时间的算法。

给定 n 个整数 a_1, \dots, a_n 和正整数 t ，问是否存在一个子集 $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ ，使得 $\sum_{i \in S} a_i = t$ 。