

上海师范大学标准试卷

2023 ~ 2024 学年 第 1 学期 考试日期 2024 年 月 日
(考试时间: 90 分钟)

科目: 算法分析与设计(A 卷)

专业 _____ 年级 _____ 班 姓名 _____ 学号 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

我承诺, 遵守《上海师范大学考场规则》, 诚信考试。签名: _____

得分 一、判断题 (本大题满分 20 分, 每题 5 分。)

- 1、在网络流问题中, 如果每条边的容量限制是不同的, 则最大流是唯一的。..... ()
- 2、假设 $f(n) = n!$, $g(n) = 2^n$, 则我们有 $g(n) = O(f(n))$ ()
- 3、假设某个算法的运行时间满足递推关系: $f(n) = 4f\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$, 则可以推出该算法的运行时间为 $O(n \log n)$ 。..... ()
- 4、如果我们证明了某个 NP 完全问题具有多项式时间的算法, 那么我们就证明了 $NP=P$ 。..... ()

得分 二、综合题 (本大题满分 80 分)

- 1、(10 分) 请给出一个时间复杂性为 $O(\log n)$ 的算法判断对于给定的一个有序数组 $A[1, 2, \dots, n]$ 中是否存在一个下标 i 满足 $A[i] = i$ 。

2、(15分) 给定一个有向图，其每条边都有正整数权值表示距离。

(1) 给出一个算法求对于给定的两个点 s 和 t ， s 到 t 的最短距离。

(2) 你的算法的时间复杂性是多少？

3、(15分)

(1) 用算法 Huffman 找出字符 a, b, c, d, e 和 f 的最优编码，它们在所给的文本中出现的频率如下所示：

a	b	c	d	e	f
0.25	0.1	0.45	0.05	0.07	0.08

(2) 比其定长编码，该编码可以节省多少空间？

4、(15分) 图的 k 染色问题是指给定一个无向图，问能否用 k 种颜色对顶点染色，使得图里的每条边的两个顶点颜色都互不相同。

(1) 证明图的 7 染色问题是一个 NP 问题。

(2) 已知图的 3 染色问题是 NP 完全问题，证明图的 7 染色也是 NP 完全问题。

5、(15分) 给定一个角度数组，每个元素都大于 0 小于 180，并且各不相同。假设数组里的元素可以重复使用。

(1) 请设计一个算法计算数组中最多可以组成多少个不同的三角形。

(2) 你设计的算法时间复杂度是多少？如果你的算法时间不是 $O(n^2)$ ，能否再给出一个 $O(n^2)$ 时间的算法解决该问题。

(3) 如果元素不可以重复使用，请给出相应的算法计算可以组成的不同三角形的个数。你的算法的时间复杂度是多少？

6、(10分) 在一条河上有一座独木桥，长度为 L ，上面分布着一些石子，为了简单起见，我们假设桥为 $0-L$ 的一段线段，而石子都分布在整数坐标上，也就是有一个函数 $\text{stone}(x)$ ，表示在坐标 x 上是否有石子，比如 $\text{stone}(0)=1$ 表示在桥头有一个石子， $\text{stone}(2)=0$ 表示在坐标为 2 的位置没有石子。

现在有一个小朋友站在桥头的位置想要过桥（站在桥尾或者跨过桥尾均为过了桥），但他不想踩到石子，他每跨出一步的步长是 $[S,T]$ 区间中的任何整数（包括 S 和 T ）。设计算法求小朋友要过河，必须踩到的最少的石子数，并给出你的算法的时间复杂性。