

# 上海师范大学标准试卷

2023 ~ 2024 学年 第 1 学期 考试日期 2024 年 月 日  
(考试时间: 90 分钟)

## 科目: 算法分析与设计(B 卷)

专业 \_\_\_\_\_ 年级 \_\_\_\_\_ 班 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

我承诺, 遵守《上海师范大学考场规则》, 诚信考试。签名: \_\_\_\_\_

得分  一、判断题 (本大题满分 20 分, 每题 5 分。)

- 1、在无向图的最小生成树问题中, 如果每条边的权重都不相同, 则最小生成树是唯一的。..... ( )
- 2、假设  $f(n) = \sum_{i=1}^n i^k, g(n) = n^{k+1}$ , 则我们有  $f(n) = O(g(n))$  ..... ( )
- 3、假设某个算法的运行时间满足递推关系:  $f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$ , 则可以推出该算法的运行时间为  $O(n \log n)$  ..... ( )
- 4、我们可以通过将一个问题归约到 SAT 问题来证明其是 NP-难的。..... ( )

得分  二、综合题 (本大题满分 80 分)

1、(10 分) 给出一个高效的算法来解决以下问题:

**输入:** 给定一个无向图  $G = (V, E)$ , 其中每条边的权值  $l_e \geq 0$ , 并且给定一条边  $e \in E$ .

**输出:** 包含边  $e$  的最短环的长度.

2、(15分) 给出一个 $O(\log n)$ 的算法解决以下问题:

**输入:** 一个有序数组 $A[1,2, \dots, n]$ 和 $x$

**输出:** 使得 $A[k] = x$ 的下标 $k$ , 如果不存在则输出-1.

3、(15分)

(1) 用算法 Huffman 找出字符 a,b,c,d,e 和 f 的最优编码, 它们在所给的文本中出现的频率如下所示:

a	b	c	d	e	f
0.25	0.15	0.35	0.05	0.09	0.11

(2) 比其定长编码, 该编码可以节省多少空间?

4、(15分) STING-SAT 问题是这样一类特殊的 SAT 问题：给定一个合取范式  $f$  和一个整数  $k$ ，判断是否存在一个赋值，该赋值最多将  $k$  个变元赋值成 1，使得公式为真。

(1) 证明这是一个 NP 问题。

(2) 给出 SAT 问题到 STING-SAT 问题的一个多项式归约，从而证明该问题是 NP 完全问题。

5、(15分) 假设在流网络中，我们除了对边有容量限制，每个顶点也存在一个容量限制。即一个顶点最多通过多少流量。

(1) 将这样的流网络转换成一个只有边有容量限制的流网络，满足两者的最大流相等。转换后的流网络的顶点个数和边个数跟原来的流网络的关系是什么？

(2) 给出一个计算题目条件下的流网络的最大流算法。

6、(10分) 令  $G = (V, E)$  是一个边上带正权重的有向图。令  $u, v$  是图上的两个顶点，对于任何一条  $u$  到  $v$  的路径：

$$\pi = u, v_1, v_2, v_3, \dots, v_r, v$$

定义  $\beta(\pi)$  为该条路径中权重最大的边的值。我们称其为路径  $\pi$  的瓶颈权重。所有这些路径的瓶颈权重的最小值我们称为  $u, v$  间的最小瓶颈权重  $\beta^*(u, v)$ ，即：

$$\beta^*(u, v) = \min\{\beta(\pi) : \pi \text{ 是 } u \text{ 到 } v \text{ 的一条路径}\}$$

请给出一个多项式时间的算法求出图上任意两点的最小瓶颈权重  $\beta^*(u, v)$ 。