上海师范大学
Shanghai Normal University

《算法设计与分析》

3-分治法 (Divide and Conquer)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 9 月 20 日

主要内容

归并排序和快速排序

假设现在存在两个已经排好序的数组 A 和 B，分别有 M 和 N 个元素。我们希望将它们合并成一个排好序的数组 C。

例 1.

令 $A = [2, 13, 43, 45, 89]$， $B = [6, 24, 51, 90, 93]$，则将其排列后得到 C:

$$C = [2, 6, 13, 24, 43, 45, 51, 89, 90, 93]$$

- 最好情况下需要比较多少次? $\min\{M, N\}$
- 最坏情况下需要比较多少次? $M + N - 1$

归并算法

算法：$\mathrm{MERGE}(A[1,\ldots,n],p,q,r)$

输入： n 元数组 $A[1,\ldots,n]$ 和整数 p,q,r，满足 $1\leqslant p\leqslant q<r\leqslant n$，且 $A[p,\ldots,q]$ 和 $A[q+1,\ldots,r]$ 都已排好序

输出： 排好序的 $A[p,\ldots,r]$

$s\leftarrow p$, $t\leftarrow q+1$, $k\leftarrow p$
while $s\leqslant q$ and $t\leqslant r$ **do**
  if $A[s]\leqslant A[t]$ **then**
    $B[k]\leftarrow A[s]$
    $s\leftarrow s+1$
  else
    $B[k]\leftarrow A[t]$
    $t\leftarrow t+1$
  $k\leftarrow k+1$
if $s=q+1$ **then** $B[k,\ldots r]\leftarrow A[t,\ldots,r]$
else $B[k,\ldots r]\leftarrow A[s,\ldots,q]$
$A[p,\ldots,r]\leftarrow B[p,\ldots,r]$

这里 $B[p,\ldots r]$ 是一个辅助数组.

归并排序的基本思想

1. 将数组 A 分成两个一样大的子数组 A_1 和 A_2.
2. 递归去排序 A_1 和 A_2.
3. 将排好序的 A_1 和 A_2 合并成一个排好序的数组.

归并排序的运算过程

考虑下列数组:

$$
\begin{array}{cccccccc}
9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 7 & 4 & 6 \\
1 & 2 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
9 & 4 & 5 & 2 \\
2 & 4 & 5 & 9
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 7 & 4 & 6 \\
1 & 4 & 6 & 7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
9 & 4 \\
4 & 9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
5 & 2 \\
2 & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
1 & 7 \\
1 & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
4 & 6 \\
4 & 6
\end{array}
$$

归并排序算法

算法： $\mathrm{MergeSort}(A[1,\ldots,n])$

输入： n 元数组 $A[1,\ldots,n]$

输出： 排好序的 $A[1,\ldots,n]$

```
mergesort(A, 1, n)
```

过程： $\mathrm{mergesort}(A, \mathrm{low}, \mathrm{high})$

```
if low < high then
    mid ← ⌊(low + high)/2⌋
    mergesort(A, low, mid)
    mergesort(A, mid + 1, high)
    MERGE(A, low, mid, high)
```

归并排序复杂性

令 $C(n)$ 为算法 MergeSort 对一个 n 元数组排序所需的比较次数，简单起见，假设 n 是 2 的幂，则我们有:

$$C(n)=\begin{cases}0 & n=1\\ 2C(\frac{n}{2})+m & n>1,\ \frac{n}{2}\leqslant m\leqslant n-1\end{cases}$$

令 $C_1(n)$ 和 $C_2(n)$ 分别表示 $C(n)$ 递推时 m 分别取最小值和最大值，即:

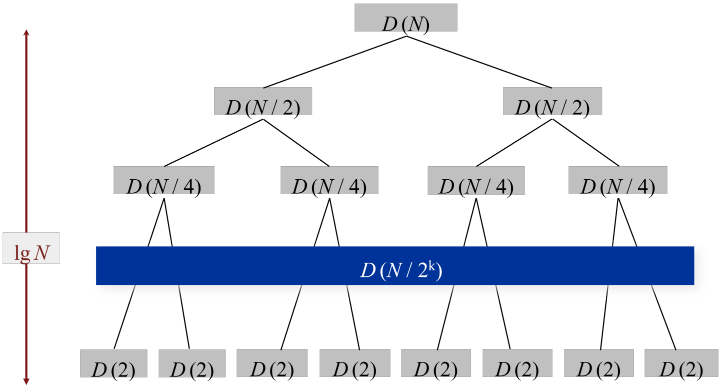
$$C_1(n)=\begin{cases}0 & n=1\\ 2C_1(\frac{n}{2})+\frac{n}{2} & n>1\end{cases},\quad C_2(n)=\begin{cases}0 & n=1\\ 2C_2(\frac{n}{2})+n-1 & n>1\end{cases}$$

显然我们有:$C_1(n)\leqslant C(n)\leqslant C_2(n)$.

计算 $C_1(n)$

$$C_1(n) = 2C_1\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}$$

图: 从图展开的角度



$$
\begin{aligned}
&N && = N/2 \\
&2\,(N/4) && = N/2 \\
&4\,(N/8) && = N/2 \\
&\cdots && \\
&2^k\,(N/2^{k+1}) && = N/2 \\
&\cdots && \\
&N/2\,(1) && = N/2 \\
\hline
& && N/2 \ \lg N
\end{aligned}
$$

Shanghai Normal University

从展开递推式的角度计算 $C_2(n)$

$$
\begin{aligned}
C_2(n) &= 2C_2(\frac{n}{2}) + n - 1 \\
&= 2(2C_2(\frac{n}{4}) + \frac{n}{2} - 1) + n - 1 \\
&= 4C_2(\frac{n}{4}) + n - 2 + n - 1 \\
&= 4(2C_2(\frac{n}{8}) + \frac{n}{4} - 1) + n - 2 + n - 1 \\
&\vdots \\
&= 2^k C_2(\frac{n}{2^k}) + kn - 2^{k-1} - 2^{k-2} - \ldots - 2 - 1 \\
&= 2^k C_2(1) + kn - 2^k + 1 \\
&= kn - 2^k + 1 \\
&= n \log n - n + 1
\end{aligned}
$$

因此我们有:

引理 2.

算法 MergeSort 对大小为 n 的数组排序, 执行元素比较的总次数介于 $\frac{n\log n}{2}$ 到 $n\log n - n + 1$ 之间。

更为严谨的叙述

事实上，对于任意情况的 n 实际递推式应该是:

$$C(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ C(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + C(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + m & n > 1,\ \frac{n}{2} \leqslant m \leqslant n - 1 \end{cases}$$

但我们可以严格的证明，此时 $C(n)$ 的界依旧是 $\Theta(n\log n)$. 因此一般情况下，我们会适当忽略取整的影响。

$n \log n$ VS n^2

我们再用一个例子来比较一下 $O(n \log n)$ 和 $O(n^2)$ 的差距。

- 家用笔记本电脑的 CPU 每秒可以执行 10^8 次操作。
- 超级计算机的 CPU 每秒可以执行 10^{12} 次操作。

计算机类型	插入排序 (n^2)			归并排序 ($n \log n$)		
	千级别	百万级别	十亿级别	千级别	百万级别	十亿级别
家用笔记本电脑	立即	2.8 小时	317 年	立即	1 秒	18 分钟
超级计算机	立即	1 秒	1 个礼拜	立即	立即	立即

Good algorithms are better than supercomputers!

归并排序的性质

归并排序是稳定的么?

- Yes!

归并排序是 in-place 的么?

- No! 合并需要 $O(n)$ 的额外空间。

自底向上的归并排序

我们考虑另一种归并排序的方法。依旧考虑下列数组:

9 4 5 2 1 7 4 6

9 4   5 2   1 7   4 6

4 9   2 5   1 7   4 6

2 4 5 9   1 4 6 7

1 2 4 4 5 6 7 9

自底向上的归并排序算法

算法： $\mathrm{BottomUpMergeSort}(A[1,\ldots,n])$

输入： n 元数组 $A[1,\ldots,n]$

输出： 排好序的 $A[1,\ldots,n]$

$t \leftarrow 1$
while $t < n$ **do**
    $s \leftarrow t,\ t \leftarrow 2s,\ i \leftarrow 0$
    while $i + t \leqslant n$ **do**
        $\mathrm{MERGE}(A, i+1, i+s, i+t)$
        $i \leftarrow i + t$
    if $i + s < n$ **then**
        $\mathrm{MERGE}(A, i+1, i+s, n)$

自底向上 Versus 自顶向下?

MergeSort 和 BottomUpMergeSort 哪个更快?

- 通过分析可知，两个算法需要的比较次数和所需的空间几乎是一样的!

自底向上 Versus 自顶向下?

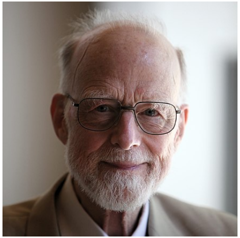
1. 你觉得哪个算法更好理解?
   - MergeSort 还是 BottomUpMergeSort?
2. 你更喜欢哪个算法?

快速排序入选 20 世纪最伟大的 10 个算法。

- 一个知乎上的介绍：https://zhuanlan.zhihu.com/p/340354313

算法设计者：Sir Charles Antony Richard Hoare

- 1980 年图灵奖获得者。
- 其他贡献如：霍尔逻辑、通信顺序进程 (CSP) 等。



寻找到 x 的正确位置-划分算法 Partition

考虑如下一个数组:

2　13　43　45　89　23　67　88　90　34　56　78

随便取其中一个值，比如令 $x = 34$，现在其在数列中第 10 个位置，不是它所在的正确位置。正确位置如下所示:

2　13　23　34　43　45　56　67　78　88　89　90

定义 3.

我们称 x 在数组 A 中处在正确的位置，如果其左面的元素都小于等于 x，右面的元素都大于等于 x。

算法: $\text{Partition}(A[low, \ldots, high])$

输入: 数组 $A[low, \ldots, high]$

输出: 将 $A[low]$ 放到正确位置后的数组 A 和 x 的正确位置 w

$i \leftarrow low$

$x \leftarrow A[low]$

for $j \leftarrow low + 1$ to $high$ **do**

    if $A[j] \leqslant x$ **then**

        $i \leftarrow i + 1$

        if $i \neq j$ **then** exchange $A[i]$ and $A[j]$

exchange $A[low]$ and $A[i]$

$w \leftarrow i$ **return** A, w

Partition 例子

$$\begin{array}{cccccccccccc}
34 & 13 & 43 & 45 & 89 & 23 & 67 & 88 & 90 & 2 & 56 & 78 \\
\uparrow & & & & & & & & & & & \\
i & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
34 & 13 & 43 & 45 & 89 & 23 & 67 & 88 & 90 & 2 & 56 & 78 \\
 & \uparrow & & & & & & & & & & \\
 & i,j & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
34 & 13 & 43 & 45 & 89 & 23 & 67 & 88 & 90 & 2 & 56 & 78 \\
 & \uparrow & \uparrow & & & & & & & & & \\
 & i & j & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\cdots$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
34 & 13 & 43 & 45 & 89 & 23 & 67 & 88 & 90 & 2 & 56 & 78 \\
 & \uparrow & & & & \uparrow & & & & & & \\
 & i & & & & j & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
34 & 13 & 23 & 45 & 89 & 43 & 67 & 88 & 90 & 2 & 56 & 78 \\
 & & \uparrow & & & \uparrow & & & & & & \\
 & & i & & & j & & & & & &
\end{array}$$

$$\cdots$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
34 & 13 & 23 & 2 & 89 & 43 & 67 & 88 & 90 & 45 & 56 & 78 \\
 & & & \uparrow & & & & & & & & \uparrow \\
 & & & i & & & & & & & & j
\end{array}$$

Partition 的性质

正确性

在运行算法 Partition 之后 x 会处在正确的位置上。

复杂性

算法 Partition 需要比较的次数恰好是 $n-1$，所需要额外的空间是 $O(1)$.

主元 pivot

我们将 Partition 的 x 称为主元 (pivot), 可以看到 Partition 实际上就是基于主元对数组进行了一个划分。

快速排序算法

算法： $\mathrm{QuickSort}(A[1,\ldots,n])$

输入： 数组 $A[1,\ldots,n]$

输出： 排好序的 $A[1,\ldots,n]$

$\mathrm{quicksort}(A, 1, n)$

过程： $\mathrm{quicksort}(A, \mathrm{low}, \mathrm{high})$

if $\mathrm{low} < \mathrm{high}$ **then**

 $(A, w) \leftarrow \mathrm{Partition}(A, \mathrm{low}, \mathrm{high})$

 $\mathrm{quicksort}(A, \mathrm{low}, w-1)$

 $\mathrm{quicksort}(A, w+1, \mathrm{high})$

QuickSort 时间复杂性分析

最坏情况： 每次划分都只划分成 1 个元素和剩余的 $n-1$ 个元素。

- $T(n) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \Theta(n^2)$

最好情况： 每次划分都选中了中位数。

- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + (n-1) = \Theta(n \log n).$

平均情况： 等概率的计算然后加权。

- $T(n) = n - 1 + (\frac{T(0)+T(n-1)}{n}) + (\frac{T(1)+T(n-2)}{n}) + \cdots + (\frac{T(n-1)+T(0)}{n}).$
- $T(n) \sim 2(n+1)\ln N \approx n \log n$

QuickSort 的性质

稳定性

- QuickSort 是不稳定的。
  - **反例：** $A = [3,\ 5,\ 5,\ 2]$.

in-place?

- QuickSort 是 in-place 的。

QuickSort 和 MergeSort 的比较

上海师范大学 Shanghai Normal University

通过我们的计算，可以发现快排的复杂性算出来要比归并排序的系数大一些，但是实际中很多情况下快排的效率要比归并排序高很多，这是为什么?

- 尽管快排比较次数更多，归并有着更多的交换位置的次数。
- 两者都有一个常数的处理时间。而在实际处理当中，由于归并需要辅助数组来进行合并，因此当对数组进行排序时，归并排序需要额外的空间，而 QuickSort 则是 in-place 的，导致实际使用起来快速排序更有效率。
- 快排的另一个优势是具有很好的局部性，而在计算机硬件中访问相近的数据会有更好的性能。
- 在处理链表的时候归并排序会有较好的表现。

QuickSort 的效率

我们继续用上述的例子来展现下 QuickSort 的效率。

- 家用笔记本电脑的 CPU 每秒可以执行 10^8 次操作。
- 超级计算机的 CPU 每秒可以执行 10^{12} 次操作。

计算机类型	归并排序 ($n \log n$)			快速排序 ($n \log n$)		
	千级别	百万级别	十亿级别	千级别	百万级别	十亿级别
家用笔记本电脑	立即	1 秒	18 分钟	立即	0.6 秒	12 分钟
超级计算机	立即	立即	立即	立即	立即	立即

Good algorithms are better than supercomputers!

Great algorithms are better than good algorithms!

Partition 主元的选择

前面提到过，快速排序的效率和主元的选择有关，如何选择主元避免极端情况的出现是提升快速排序效率的关键。

- 随机选择。RandomizedQuickSort.
- 平衡快排。BalancedQuickSort.
- 三路快排。3-wayQuickSort.

3 路快排对于有大量重复元素的数组排序效率会显得非常高，其核心思想是将数组划分成三部分，分别是小于主元、等于主元和大于主元的部分。

Dijstra 三路划分

- 令 $x = A[low]$ 为主元, 维护 3 个变量 lo, i, hi, 其中 i 是遍历下标， lo, hi 初始在 $low, high$ 的位置上。
- 从左到右遍历 $A[i]$ 直至 $i > hi$:
  1. 如果 $A[i] < x$，交换 $A[lt]$ 和 $A[i]$，lt 和 i 都加 1.
  2. 如果 $A[i] > x$，交换 $A[gt]$ 和 $A[i]$，gt 减 1.
  3. 如果 $A[i] = x$，i 加 1.

排序算法总结

排序算法	平均时间	最坏时间	最好时间	稳定性	in-place?
SelectSort	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n^2}{2}$	$\times$	$\checkmark$
InsertSort	$\frac{n^2}{4}$	$\frac{n^2}{2}$	n	$\checkmark$	$\checkmark$
ShellSort	?	?	n	$\times$	$\checkmark$
RadixSort	$O(nk)$	$O(nk)$	$O(nk)$	$\checkmark$	$\times$
MergeSort	$n\log n$	$n\log n$	$n\log n$	checkmark	$\times$
QuickSort	$2n\ln n$	$\frac{n^2}{2}$	$n\log n$	$\times$	$\checkmark$
3-wayQuickSort	$2n\ln n$	$\frac{n^2}{2}$	n	$\times$	$\checkmark$

一个关于上述排序算法的可视化网站：http://www.sorting-algorithms.com/

分治思想与主定理

分治思想框架

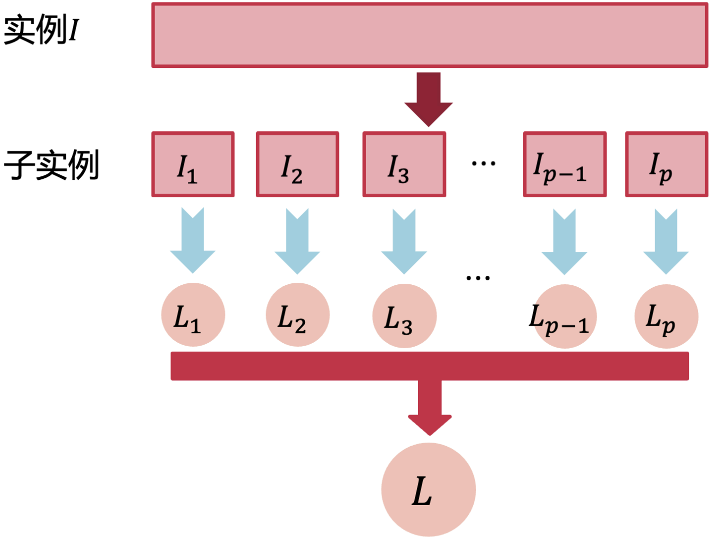
上海师范大学 Shanghai Normal University

无论是排序还是归并，都可以用下述的分治思想框架来描述：

分治算法框架

1. **划分 (Divide Step)**：将原问题分解为若干个规模较小，相互独立，与原问题形式相同的子问题。
2. **治理 (Conquer Step)**：递归的求解各个子问题。若子问题规模足够小，则直接求解。
3. **合并 (Combine Step)**：将各个子问题的解合并为原问题的解。

分治思想框架-图示



假设在一个分治算法中，我们将其分解成了 a 个规模为 $\frac{n}{b}$ 的子问题，递归求解后再花 $O(n^d)$ 的时间将解合并起来，则该算法的时间复杂性可通过下列递推式计算而来:

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ aT(\frac{n}{b}) + O(n^d) & n > 1 \end{cases}$$

怎么快速计算上述递推式的结果?

定理 4 **[主定理 (Master Theorem)].**

上述递推式满足:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & a < b^d \\ O(n^d \log n) & a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & a > b^d \end{cases}$$

例 5.

1. 在归并排序中，我们有：

$$C(n) = 2C(\frac{n}{2}) + O(n)$$

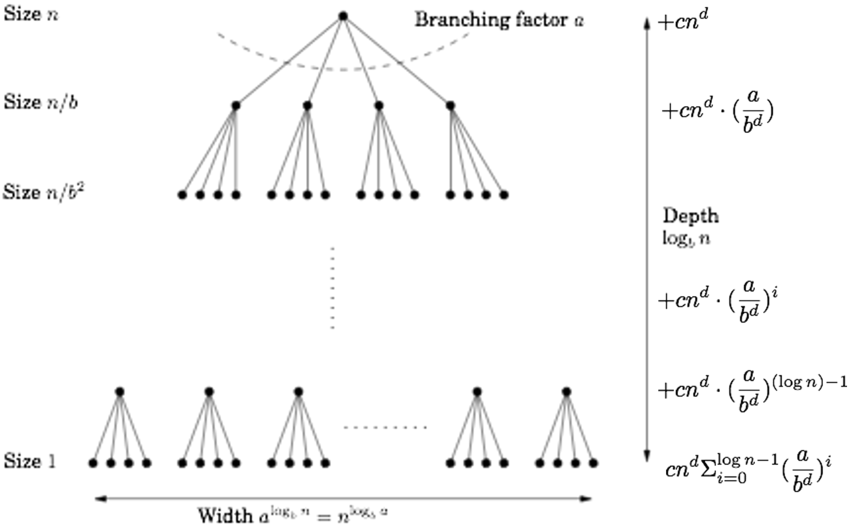
其中 $a = 2, b = 2, d = 1, a = b^d$，因此 $C(n) = O(n \log n)$.

2. 在二分搜索中，我们有：

$$C(n) = C(\frac{n}{2}) + O(n)$$

其中 $a = 1, b = 2, d = 1, a < b^d$，因此 $C(n) = O(n)$.

主定理的证明 (I)



Size n
Branching factor a
Size n/b
Size n/b^2
Size 1
Width $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$
$+cn^d$
$+cn^d \cdot (\frac{a}{b^d})$
Depth
$\log_b n$
$+cn^d \cdot (\frac{a}{b^d})^i$
$+cn^d \cdot (\frac{a}{b^d})^{(\log n)-1}$
$cn^d \Sigma_{i=0}^{\log n-1} (\frac{a}{b^d})^i$

考察 $\frac{a}{b^d}$ 的值:

- $\frac{a}{b^d} < 1$, 则级数是递减的，因此其和可以仅由第一项来表示，即 $T(n) = O(n^d)$.
- $\frac{a}{b^d} = 1$, 则所有的 $O(\log n)$ 项均等于 $O(n^d)$，即 $T(n) = O(n^d \log n)$.
- $\frac{a}{b^d} > 1$, 则级数是递增的，因此其和可以用最后一项来表示，即

$$T(n) = cn^d(\frac{a}{b^d})^{\log_b n} = cn^{\log_b a}.$$

□

计算下列递推式的结果

1. $f(n) = f(\frac{n}{2}) + 1$.
2. $f(n) = 2f(\frac{n}{2}) + n^2$.
3. $f(n) = 9f(\frac{n}{3}) + n$.
4. $f(n) = 5f(\frac{n}{2}) + n^3$.

1. $f(n) = O(\log n)$.
2. $f(n) = O(n^2)$.
3. $f(n) = O(n^2)$.
4. $f(n) = O(n^3)$.

关于主定理-更多

上海师范大学 Shanghai Normal University

如果问题被分解成了大小不同的子问题，该如何处理?

比如一个问题的算法的递推式满足如下条件:

$$T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + O(n).$$

- 直接使用递归树。
- 使用主定理的扩展版本：Akra-Bazzi Method

利用分治思想设计算法

问题 6 **[寻找最大值和最小值元素].**

给定一个数组，如何寻找其中的最大值和最小值?

暴力枚举算法：$\mathrm{MinMax}_{\mathrm{direct}}(A[1,...,n])$

输入: 数组 $A[1,...,n]$

输出: 数组 A 中的最大值和最小值

1: $x \leftarrow A[1]$, $y \leftarrow A[1]$
2: **for** $i \leftarrow 2$ to n **do**
3:     **if** $A[i] < x$ **then** $x \leftarrow A[i]$
4:     **if** $A[i] > y$ **then** $y \leftarrow A[i]$
5: **return** (x, y)

—共需要$2n-2$次比较次数!

利用分治的 MinMax 算法

上海师范大学 Shanghai Normal University

算法: $MinMax(A[1, \dots, n])$

输入: 数组 $A[1, \dots, n]$

输出: 数组 A 中的最大值和最小值

$minmax(1, n)$

过程: $minmax(low, high)$

if $high - low = 1$ **then**

  if $A[low] < A[high]$ **then return** $(A[low], A[high])$.

  else return $(A[high], A[low])$.

$mid \leftarrow \lfloor \frac{low+high}{2} \rfloor$

$(x_1, y_1) \leftarrow minmax(low, mid)$

$(x_2, y_2) \leftarrow minmax(mid + 1, high)$

return $(\min(x_1, x_2), \max(y_1, y_2))$

MinMax 的比较次数

令算法 MinMax 对于 n 个数组所需要的比较次数为 $T(n)$，则 $T(n)$ 满足:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leqslant 2 \\ 2T(\frac{n}{2}) + 2 & n > 2 \end{cases}$$

假设 $n = 2^k$，则计算 $T(n)$ 可得:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 2 = \ldots = 2^{k-1}T(2) + 2^{k-1} + \ldots + 2 = \frac{n}{2} + 2^k - 2 = \frac{3n}{2} - 2.$$

现在我们讨论一个基本的运算操作，乘法。

问题 7 **[大整数乘法].**

给定两个 n 位长的整数，求这两个整相乘之后的积。

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & \times & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

一共需要 $O(n^2)$ 次操作。

大整数乘法-分治 (I)

$$x:\ \underbrace{1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0}_{u}\ \Big|\ \underbrace{1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0}_{v}$$

$$x = 2^6 \cdot u + v$$

考虑 2 个 n 位长的整数，我们可以将其分解成两个 $n/2$ 位长的整数，即如上所示:

$$x = 2^{\frac{n}{2}} \cdot u_x + v_x, \quad y = 2^{\frac{n}{2}} \cdot u_y + v_y.$$

则我们有:

$$x \cdot y = (2^{\frac{n}{2}} \cdot u_x + v_x) \cdot (2^{\frac{n}{2}} \cdot u_y + v_y) = 2^n \cdot (u_x \cdot u_y) + 2^{\frac{n}{2}} \cdot ((u_x \cdot v_y) + (v_x \cdot u_y)) + (v_x \cdot v_y).$$

如果使用上面的方式，即把原来的乘法变成 4 个长度为 $n/2$ 的整数的乘法，那么整个算法的复杂性满足$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n)$，即依旧只有 $T(n) = O(n^2)$.

我们注意到：

$$u_x \cdot v_y + v_x \cdot u_y = (u_x + v_x) \cdot (u_y + v_y) - u_x \cdot u_y - v_x \cdot v_y.$$

因此我们只需要计算 3 个大小为 $\frac{n}{2}$ 的乘法，便可以通过下述等式：

$$x \cdot y = 2^n (u_x \cdot u_y) + 2^{\frac{n}{2}} ((u_x + v_x) \cdot (u_y + v_y) - u_x \cdot u_y - v_x \cdot v_y) + (v_x \cdot v_y). \tag{1}$$

计算出 $x \cdot y$ 的值。

这样的算法时间复杂性满足：

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) = O(n^{\log 3}).$$

$O(n^{\log 3})$ 的算法来计算乘法

我们现在可以回答最初提到的问题：$\mathrm{Fib}_3(n)$ 确实比 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 更快！

现在我们来思考两个 $n \times n$ 的矩阵相乘:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots a_{in}b_{nj}$$

直接计算矩阵乘法

如果直接计算两个矩阵的乘积，我们需要$O(n^3)$次操作。

矩阵乘法-分块算法

依旧用类似乘法的思想，我们可以将矩阵分解成四个 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ 的矩阵进行计算：

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

其中 C_{ij} 满足：

- $C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21}$.
- $C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}$.
- $C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21}$.
- $C_{22} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22}$.

分块算法

矩阵分块算法需要对 8 个 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ 的矩阵进行计算，因此其时间复杂性满足

$$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + O(n^2) = O(n^3).$$

我们来介绍 Strassen 算法，其只用 7 个小矩阵的乘积来计算 $A \times B$. 计算如下的矩阵乘积:

1. $D_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$.
2. $D_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$.
3. $D_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$.
4. $D_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$.
5. $D_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$.
6. $D_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$.
7. $D_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$.

从而:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 + D_4 - D_5 + D_7 & D_3 + D_5 \\ D_2 + D_4 & D_1 + D_3 - D_2 + D_6 \end{bmatrix}$$

Strassen 算法时间复杂性

用 Strassen 算法计算矩阵乘积的时间复杂性满足:

$$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + O(n^2) = O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.81}).$$

最快的矩阵算法

人们目前还不知道矩阵的乘法能否只用 $n^{2+o(1)}$ 时间，目前最好的下界是 $O(n^2 \log n)$，而最快的算法目前则需要 $O(n^{2.371552})$.

参考资料:

- 下界: On the complexity of matrix product
- 上界: New Bounds for Matrix Multiplication: from Alpha to Omega

矩阵乘法-Strassen 算法 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

上界算法的历史:

Timeline of matrix multiplication exponent

Year	Bound on omega	Authors
1969	2.8074	Strassen[1]
1978	2.796	Pan[11]
1979	2.780	Bini, Capovani [it], Romani[12]
1981	2.522	Schönhage[13]
1981	2.517	Romani[14]
1981	2.496	Coppersmith, Winograd[15]
1986	2.479	Strassen[16]
1990	2.3755	Coppersmith, Winograd[17]
2010	2.3737	Stothers[18]
2013	2.3729	Williams[19][20]
2014	2.3728639	Le Gall[21]
2020	2.3728596	Alman, Williams[6][22]
2022	2.371866	Duan, Wu, Zhou[3]
2023	2.371552	Williams, Xu, Xu, and Zhou[2]

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们再回到数组上的元素寻找问题。

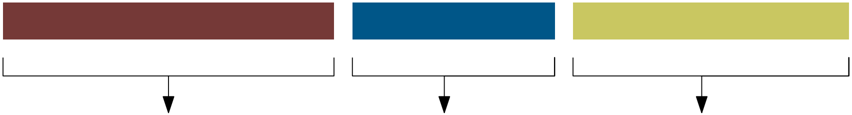
问题 8 **[寻找第 k 小的元素].**

给定一个数组 $A[1,...,n]$ 和整数 k, 请给出一个算法找出数列中第 k 小的元素

- 如果令 k 为 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，则就是寻找一个数组的中位数问题。
- 如果直接利用排序再寻找第 k 小的元素，其时间复杂性至少为 $O(n \log n)$.
- 问题是排序其实知道了所有的顺序，因此有没有可能，用 $O(n)$ 的时间就找到第 k 小的元素?

划分算法 Partition 回顾

Partition 算法可以将一个元素放至准确的位置，同时也将其划分成了有规律的三部分：



$A_1 = \{a|a < X\}$ $A_2 = \{a|a = x\}$ $A_3 = \{a|a > x\}$

- 利用 Partition，我们可以确定所要找的第 k 小的元素是在 A_1，A_2，A_3 中的一个集合。
- 如何保证每次 A_1，A_3 都有比较大的规模？
  - 随机化的选择。-可以证明期望是 $O(n)$ 的。
  - 确定性的主元选择方法，保证 A_1，A_3 都有 $\Omega(n)$ 的大小。

合适主元的寻找

考虑如下的数组，我们将其写成一张表：

3	4	328	183	92	95	9	25
2	2	74	38	29	27	727	45
4	84	83	17	451	7	41	79
99	84	45	37	5	7	1	26
92	21	75	38	3	91	42	

合适主元的寻找

考虑如下的数组，我们将其写成一张表:

2	4	328	183	92	95	9	25
3	2	74	38	29	27	727	45
4	84	83	17	451	7	41	79
92	84	45	37	5	7	1	26
99	21	75	38	3	91	42	

考虑如下的数组，我们将其写成一张表：

2	2	328	183	92	95	9	25
3	4	74	38	29	27	727	45
4	21	83	17	451	7	41	79
92	84	45	37	5	7	1	26
99	84	75	38	3	91	42	

合适主元的寻找

考虑如下的数组，我们将其写成一张表：

2	2	45	183	92	95	9	25
3	4	74	38	29	27	727	45
4	21	75	17	451	7	41	79
92	84	83	37	5	7	1	26
99	84	328	38	3	91	42	

合适主元的寻找

考虑如下的数组，我们将其写成一张表：

2	2	45	17	92	95	9	25
3	4	74	37	29	27	727	45
4	21	75	38	451	7	41	79
92	84	83	38	5	7	1	26
99	84	328	183	3	91	42	

考虑如下的数组，我们将其写成一张表：

2	2	45	17	3	95	9	25
3	4	74	37	5	27	727	45
4	21	75	38	29	7	41	79
92	84	83	38	92	7	1	26
99	84	328	183	451	91	42	

合适主元的寻找

上海师范大学 Shanghai Normal University

考虑如下的数组，我们将其写成一张表：

2	2	45	17	3	7	9	25
3	4	74	37	5	7	727	45
4	21	75	38	29	27	41	79
92	84	83	38	92	91	1	26
99	84	328	183	451	95	42	

合适主元的寻找

考虑如下的数组，我们将其写成一张表：

2	2	45	17	3	7	1	25
3	4	74	37	5	7	9	45
4	21	75	38	29	27	41	79
92	84	83	38	92	91	42	26
99	84	328	183	451	95	727	

考虑如下的数组，我们将其写成一张表：

2	2	45	17	3	7	1	25
3	4	74	37	5	7	9	26
4	21	75	38	29	27	41	45
92	84	83	38	92	91	42	79
99	84	328	183	451	95	727	

合适主元的寻找

考虑如下的数组，我们将其写成一张表：

2	2	45	17	3	7	1	25
3	4	74	37	5	7	9	26
4	21	75	38	29	27	41	78
92	84	83	38	92	91	42	79
99	84	328	183	451	95	727	

合适主元的寻找

上海师范大学 Shanghai Normal University

考虑如下的数组，我们将其写成一张表：

2	2	7	3	17	7	45	25
3	4	7	5	37	7	74	26
4	21	27	29	38	41	75	78
92	84	91	92	38	42	83	79
99	84	95	451	183	727	328	

合适主元的寻找

考虑如下的数组，我们将其写成一张表:

2	2	7	3	17	7	45	25
3	4	7	5	37	7	74	26
4	21	27	29	38	41	75	78
92	84	91	92	38	42	83	79
99	84	95	451	183	727	328	

- 在元素 29 的左上方，所有的元素都不会大于 29.
- 在元素 29 的右下方，所有的元素都不会小于 29.

寻找第 k 小的元素-Select 算法

算法: $Select(A[1,\ldots,n],k)$

输入: 数组 $A[1,\ldots,n]$ 和整数 k.

输出: A 中第 k 小的元素

1: $\mathtt{select}(A, 1, n, k)$

过程: $\mathtt{select}(A, low, high, k)$

2: $p \leftarrow high - low + 1$

3: **if** $p \leqslant 44$ **then sort** A and **return** $A[k]$.

4: $q \leftarrow \lceil p/5 \rceil$ Divide A into $\lceil p/5 \rceil$ groups of 5 elements each. If there are any groups of size < 5, leave them out.

5: Sort each of q groups individually and extract its median. Let the set of medians be M.

6: $mm \leftarrow \mathtt{select}(M, 1, q, \lceil \frac{q}{2} \rceil)$

7: Partition $A[low, \ldots, high]$ into three arrays:

$$A_1 = \{a|a < mm\},\ A_2 = \{a|a = mm\},\ A_3 = \{a|a > mm\}$$

8: **CASE:**

$\lvert A_1\rvert \geqslant k$	**return** $\mathtt{select}(A_1, 1, \lvert A_1\rvert, k)$
$\lvert A_1\rvert + \lvert A_2\rvert \geqslant k$	**return** mm
$\lvert A_1\rvert + \lvert A_2\rvert < k$	**return** $\mathtt{Select}(A_3, 1, k - \lvert A_1\rvert - \lvert A_2\rvert)$

- 令 B_1 表示 A 中大于等于元素 mm 的集合，显然 $|A_1|+|B_1|=n$，并且:

$$|B_1| \geqslant 3\cdot\lceil\frac{1}{2}\cdot\lfloor\frac{n}{5}\rfloor\rceil \geqslant \frac{3}{2}\cdot(\frac{n-4}{5}) = \frac{3n-12}{10}$$

  从而 $n>44$ 时 $|A_1| \leqslant \frac{7n+12}{10} \leqslant \lfloor\frac{3n}{4}\rfloor$.

- 同理可得 $n>44$ 时 $|A_3| \leqslant \frac{7n+12}{10} \leqslant \lfloor\frac{3n}{4}\rfloor$.

整个算法的运行时间 $T(n)$ 满足:

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n<44 \\ T(\lfloor\frac{n}{5}\rfloor)+T(\lceil\frac{3n}{4}\rceil)+cn & n\geqslant 44 \end{cases}$$

注意到 $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}<1$，我们有$T(n)=O(n)$!

关于 Select 算法

尽管 Select 是一个确定的最坏情况也是 $O(n)$ 的算法，但实际中我们还是用随机版本的主元选择，为什么?

- 过大的常数导致 Select 的运行时间偏慢。

Select 选择 5 个一组，是否还有其他的选择?

- 任何一个 $\geqslant 5$ 的奇数都可以。
- 选择的分组越大，算法越慢。这一部分的结论会在作业中请同学们自己完成。

总结

本节内容

- 归并排序和快速排序
- 分治算法的设计框架、主定理
- 利用分治思想来设计算法
  - 寻求最大最小值 MinMax
  - 大整数乘法 Multiplication
  - 矩阵乘法 Strassen
  - 寻找第 k 小的元素 Select