《算法设计与分析》

4-快速傅立叶变换 (Fast Fourier Transform)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 10 月 12 日

主要内容

- 多项式乘法
- 快速傅里叶变换的细节

多项式乘法

考察两个多项式:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

其乘积 $C(x) = A(x) \cdot B(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{2n} x^{2n}$，并且满足:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

因此利用上面的公式计算 c_k 需要 $O(k)$ 次操作，求出整个系数需要 $O(n^2)$ 的时间。

有没有更快的算法?

整数相乘的算法实际上严重依赖于多项式乘法的算法。

例如，我们想要计算 1234×5678，我们可以将其转化为多项式乘法的形式：

$$\begin{aligned}1234 \times 5678 &= (1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 4) \times (5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 7 \times 10 + 8) \\ &= A(10) \times B(10)\end{aligned}$$

其中 $A(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4,\ B(x) = 5x^3 + 6x^2 + 7x + 8.$

从而计算两数相乘变成了计算多项式 $C(x) = A(x) \cdot B(x)$，再将 x 换成使用的基数即可。

多项式的另一种表示方法：插值表示法 (I)

n 次多项式可以通过 $n+1$ 个系数来进行表示：

- $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 可以简单表示为 $[a_0, \ldots, a_n]$.
- 一个 $n+1$ 维向量 $[a_0, \ldots, a_n]$ 可以唯一确定一个多项式。

我们介绍其另一种表示方法，其运用到下列的性质：

事实 1.

一个 n 次多项式可以被任意其 $n+1$ 个不同点处的取值所唯一确定。

上述事实提供了另一种多项式的表示方法：插值表示法。

令 $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $x_0, \ldots x_n$ 是任意 $n+1$ 个不同的实数，则:

- $[A(x_0), \ldots, A(x_n)]$ 可以唯一确定多项式 $A(x)$.

例 2.

考察 2 次多项式 $f(x)$，其满足 $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4$，则:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 4 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \\
&= 1 \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{2} + 2 \cdot (-x^2 + 2x) + 4 \cdot \frac{x^2 - x}{2} \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1
\end{aligned}
$$

多项式的另一种表示方法：插值表示法 (III)

上海师范大学 Shanghai Normal University

事实上，如果我们知道了一个至多为 n 次多项式在 $n+1$ 个不同点处的取值 $(x_0, y_0), \ldots (x_n, y_n)$，则该多项式可以被下列方式唯一的计算出来：

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

上述方法即拉格朗日插值法。

目前我们已经有了两种来表示 n 次多项式的方法：

- **系数表示法**：用其 $n+1$ 个系数进行表示：$[a_0, \ldots, a_n]$.
- **插值表示法**：用其 $n+1$ 个点来进行表示：$[A(x_0), \ldots, A(x_n)]$.

系数表示法 or 插值表示法?

- 系数表示法能够很直观的显示多项式的情形。
  - $A = [a_0, \ldots, a_n] \Longrightarrow A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$
- 插值表示法则能够更加方便的对多项式乘法进行计算。
  - 假设现在有 n 次多项式 $A(x)$ 和 $B(x)$, 我们想要计算 $C(x) = A(x) \cdot B(x)$.
  - $C(x)$ 至多是 $2n$ 次多项式，因此我们知道 $2n+1$ 个点的取值便可以确定该多项式。
  - 通过 $A(x_0), \ldots A(x_{2n})$ 和 $B(x_0), \ldots B(x_{2n})$ 我们可以快速确定 $C(x)$ 中的 $2n+1$ 个点，这是因为:

$$C(x_i) = A(x_i) \cdot B(x_i), \; i = 0, \ldots, 2n$$

多项式乘法的算法思路

由上述讨论可知，计算由值表示的多项式的乘法所需的时间是线性的（只需计算 $2n+1$ 个乘积），从而我们不难想到如下的思路：

- 计算步骤：通过输入多项式的系数得到一组多项式在选定点处的值，并求得相应乘积在定点处的值。
- 插值步骤：通过多项式在选定点处的值还原出多项式的系数。

整个思路如下图所示：

多项式乘法框架

算法：$\mathrm{PolynomialMultiplication}(A, B)$

输入： 两个 n 次多项式的系数 $A = [a_0, \ldots, a_n]$, $B = [b_0, \ldots, b_n]$

输出： 两个多项式的乘积的系数表示 $C = [c_0, \ldots, c_{2n}]$

选择阶段:

1: 选择 $2n + 1$ 个不同的点 $x_0, \ldots, x_{2n}$.

计算阶段:

2: 计算 $A(x_0), \ldots, A(x_{2n})$ 和 $B(x_0), \ldots, B(x_{2n})$.

乘法阶段:

3: 通过 $C(z) = A(z) \cdot B(z)$ 计算 $C(x_0), \ldots, C(x_{2n})$.

插值阶段:

4: 根据 $C(x_0), \ldots, C(x_{2n})$ 还原出 C 的系数 $[c_0, \ldots, c_{2n}]$.

正确性

该算法的正确性可以由多项式的两种表示方法的等价性得到。

复杂性

- **选择阶段**显然只需要 $O(n)$ 的时间。
- **乘法阶段**也只需要 $O(n)$ 的时间。
- 在**计算阶段**，由 Horner 规则可知，计算一个点的值需要 $O(n)$ 的时间，因此如果我们采用朴素的方法，计算阶段需要 $O(n^2)$ 的时间。
- **插值阶段**我们暂时还没有讨论。

下面，我们先着重处理如何提升计算阶段的效率。

计算阶段的分治算法 (I)

一个很重要的想法在于对于一个多项式 $A(x)$ 当我们计算 $A(x_0)$ 和 $A(-x_0)$ 时，由于其偶次幂相同，其实存在大量重复的运算。

考察如下的多项式:

$$A(x) = 3 + 4x + 6x^2 + 2x^3 + x^4 + 10x^5$$

我们将其划分成 x 的奇次幂项和偶次幂项，即:

$$A(x) = (3 + 6x^2 + x^4) + x(4 + 2x^2 + 10x^4)$$

$$A_1(x^2) = 3 + 6x^2 + x^4 \qquad A_2(x^2) = 4 + 2x^2 + 10x^4$$

计算 $A(x)$ 在 $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ 的值可以变为计算 $A_1(x)$，$A_2(x)$ 在 $1, 4, 9$ 上的值!

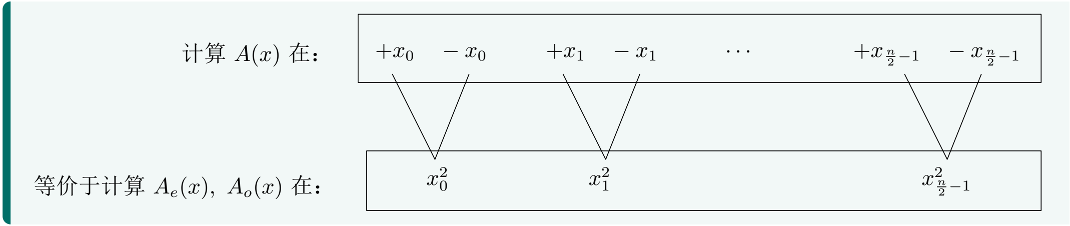
计算阶段的分治算法 (II)

一般的，对于一个 n 次多项式 $A(x)$(为了方便讨论，假设 n 是偶数)，我们可以将其转换为：

$$A(x) = A_e(x^2) + xA_o(x^2)$$

其中，$A_e(x)$，$A_o(x)$ 都是连个次数小于等于 $\frac{n}{2} - 1$ 的多项式。

则对于给定点对 $\pm x_0, \ldots, \pm x_{\frac{n}{2}-1}$ 在 $A(x)$ 的计算，其可以转换为对于点对 $x_0^2, \ldots, x_{\frac{n}{2}-1}^2$ 在 $A_e(x)$，$A_o(x)$ 的计算。



计算阶段的分治算法 (III)

按照上述的方法，规模为 n 的原问题被转移成为了 2 个规模为 $\frac{n}{2}$，从而上述思路得到的算法运行时间满足:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n)$$

计算可得,$T(n) = O(n \log n)$，似乎我们已经完成了目标!

平方为负数?

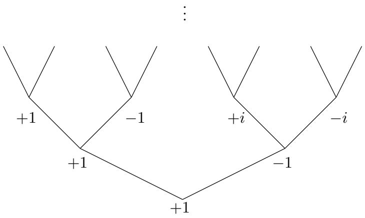
上述方法似乎还面临一个问题，在计算的下一层，我们还需要 $x_0^2, \dots, x_{\frac{n}{2}-1}^2$ 也是成对出现的，可是一个平方数如何是负的?

$\sqrt{-1} = i$! 我们需要使用复数!

选取合适的复数

我们对递归作反向工程来发现需要选取的复数:

- 在递归的最底层，只会有一个点 1.
- 在递归的下一层，我们需要选取两个点 $\pm\sqrt{1} = \pm 1$.
- 而在下一层，则是 $\pm\sqrt{1} = \pm 1$, $\pm\sqrt{-1} = \pm i$.
- ...



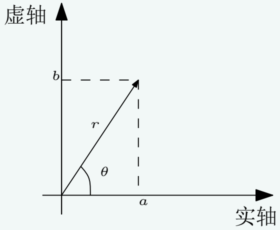
单位元的 n 次复根

随着递归的进行，我们最终会获得的 n 个点会满足:

$$z^n = 1$$

复数与复平面

- 复数 $z = a + bi$ 可以视作复平面上的一个点。
- 极坐标表示：$z = r(\cos\theta + \sin\theta) = re^{i\theta}$.
- 长度：$r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- 角度: $\theta \in [0, 2\pi]$ 满足:$\sin\theta = \frac{a}{r}$, $\cos\theta = \frac{b}{r}$.

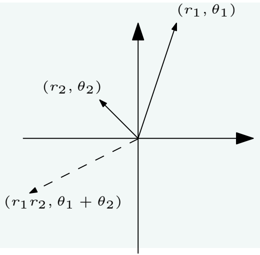


极坐标乘法的简便性

两个复数相乘等价于其长度相乘，角度相加:

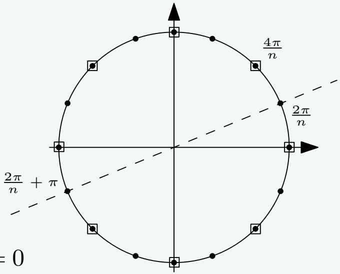
- $(r_1, \theta_1) \times (r_2, \theta_2) = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$.

若 $z = (1, \theta)$ 即 z 在单位圆上，则 $z^n = (1, n\theta)$.



单位元的 n 次复根

右图显示了方程 $z^n=1$ 的解 ($n=16$ 的情况):



- 上述方程的解是 $z=(1,\theta)$，其中 θ 是 $\frac{2\pi}{n}$ 的倍数。
- 当 n 是偶数的时候:
  - 解正负成对出现, 带方框的点表示方程 $z^{\frac{n}{2}}=1$ 的解。
- 令 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$，则我们有:
  - 若 i 不是 n 的倍数，则 $1+\omega^i+\omega^{2i}+\ldots+\omega^{(n-1)i}=0$
  - 若 i 是 n 的倍数，则 $1+\omega^i+\omega^{2i}+\ldots+\omega^{(n-1)i}=n$。

计算阶段的分治算法

该想法的核心在于要计算 n 个 n 次单位根在 $A(x)$ 上的值，等价于计算 $A_e(x)$ 和 $A_o(x)$ 在 $\frac{n}{2}$ 个 $\frac{n}{2}$ 次单位根上的值。

计算阶段的分治算法

由上述讨论，我们终于得到了计算阶段的分治算法，也即快速傅里叶变换 (FFT):

算法 $\mathrm{FFT}(A, \omega)$

输入: 系数表示的至多 $n-1$ 次多项式 $A(x)$，这里假设 $n = 2^k$； ω 是一个 n 次单位根。

输出: $A(\omega^0), \ldots A(\omega^{n-1})$ 的值

if $n = 1$ **then**

  return $A(\omega^0)$

将 $A(x)$ 表示为 $A_e(x^2) + xA_o(x^2)$

$[A_e(\omega^2),\ \ldots,\ A_e(\omega^{2n-2})] \leftarrow \mathrm{FFT}(A_e, \omega^2)$

$[A_o(\omega^2),\ \ldots,\ A_o(\omega^{2n-2})] \leftarrow \mathrm{FFT}(A_o, \omega^2)$

for $j = 0, \ldots, n-1$ **do**

  $A(\omega^j) \leftarrow A_e(\omega^{2j}) + \omega^j A_o(\omega^{2j})$

return $[A(\omega^0), \ldots A(\omega^{n-1})]$

插值阶段的算法

回顾一下我们的思路:

现在只剩**插值阶段**了！只需要通过计算好的 $C(\omega^0), \ldots C(\omega^{n-1})$ 还原出 C 的多项式即可！

> **神奇的结论！**
>
> 算法$FFT([C(\omega^0), \ldots C(\omega^{n-1})], \omega^{-1})$恰好计算出了所有的系数！换句话说，两个过程几乎是一样的！

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们下面来解释这个神奇的结论。首先我们回顾一下，我们之前究竟算了些什么。

通过算法的计算阶段和乘法阶段，我们算出了 $C(x_0),\dots C(x_{N-1})$ 的具体值。这里为了后面的表示方便，我们不妨假定 $N-1$ 就是 C 的次数，因为显然后面的步骤与 $A(x)$ 跟 $B(x)$ 无关了。

另一方面，假设 $C(x) = c_0 + c_1 x + \dots c_{n-1} x^{n-1}$，则上述过程可以变成如下矩阵的计算形式:

$$\begin{bmatrix} C(x_0) \\ C(x_1) \\ \vdots \\ C(x_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{N-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N-1} & \cdots & x_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C(x_0) \\ C(x_1) \\ \vdots \\ C(x_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{N-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N-1} & \cdots & x_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix}$$

我们令 M 表示上式中间的矩阵，这是一个著名的矩阵：Vandermonde **矩阵**。

Vandermonde 矩阵

Vandermonde 矩阵具有非常奇妙的性质，下面是一些我们要用到的性质：

- 如果 $x_0, \ldots x_{n-1}$ 互不相同，则 M 是可逆的。
- 计算 M 的逆矩阵需要 $O(n^2)$ 的时间。

计算过程是 M。而**插值过程其实就是** M **的逆** M^{-1}！

尽管 M 具有非常好的性质，但是我们还是需要 $O(n^2)$ 的时间来计算 M^{-1}，这显然不是我们想要的。

让我们再将目光转回到复数上来，令 $x_0, \ldots, x_{N-1}$ 表示为 N 次单位根，即 $x_i = \omega^i$，则之前的 FFT 算法可以表示成计算了如下的列向量：

$$\begin{bmatrix} C(\omega^0) \\ C(\omega^1) \\ \vdots \\ C(\omega^{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^1 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

我们记中间的矩阵为$M_N(\omega)$，显然插值阶段的计算就是计算$M_N(\omega)^{-1}$.

概念回顾

- **内积:** 在复数向量域 $\mathbb{C}^n$ 上，两个向量 $u = (u_0, \ldots, u_{n-1})$ 与 $v = (v_0, \ldots, v_{n-1})$ 的内积定义为:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \overline{v_i}$$

其中 $\overline{v_i}$ 表示 v_i 的共轭复数，即如果 $v_i = re^{i\theta}$，则 $\overline{v_i} = re^{-i\theta}$。

- **正交:** 两个向量正交，即其夹角为直角。当两个向量正交时，其内积为 0.

矩阵 $M_N(\omega)$ 的重要观察结论

$M_N(\omega)$ 的列向量是**正交**的。

矩阵 $M_N(\omega)$(II)

我们称 $M_N(\omega)$ 中的 n 个列向量组成了一个新的**正交基**，这个基称为Fourier **基**。

矩阵 $M_N(\omega)$ 变换的本质

对一个向量乘以 $M_N(\omega)$ 相当于将其从**标准基**下的坐标变换成为**Fourier 基**下的坐标。

因此，求 $M_N(\omega)$ 的逆等价于将**Fourier 基**下的坐标变换成为**标准基**下的坐标。

反演公式

$M_N(\omega)^{-1} = \frac{1}{n} M_N(\omega^{-1})$.

至此，我们解释清楚了这个神奇的结论，即还原插值的过程也等价于调用 FFT 算法。

算法：PolynomialMultiplication(A, B)

输入: 两个 n 次多项式的系数 $A = [a_0, \ldots, a_n]$, $B = [b_0, \ldots, b_n]$, 这里假设 $2n = 2^k - 1$.

输出: 两个多项式的乘积的系数表示 $C = [c_0, \ldots, c_{2n}]$

1: $x \leftarrow \omega$. ▷ ω 是 $2n+1$ 次单位根
2: $valA \leftarrow \mathrm{FFT}(A, \omega)$.
3: $valB \leftarrow \mathrm{FFT}(B, \omega)$. ▷ 计算阶段
4: $valC \leftarrow [0, \ldots, 0]$
5: **for** $i = 0, \ldots, 2n$ **do**
6: $\quad valC[i] = valA[i] \cdot valB[i]$ ▷ 乘法阶段
7: $C \leftarrow \frac{1}{2n} \cdot \mathrm{FFT}(valC, \omega^{-1})$. ▷ 插值阶段
8: **return** C

多项式乘法的总结

Shanghai Normal University

多项式乘法

- 两种表示方法。
  - 系数表示法。
  - 插值表示法。
- 乘法的方式。
  - 用值取计算乘法，用系数取表示多项式。
- 选值的计算。
  - 快速傅立叶变换 FFT。

快速傅里叶变换的细节

让我们再次强调 FFT 其实解决了如下的运算：

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^1 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

下面我们通过对 $M_n(\omega)$ 的分析再次感受一下**分治**的思想。其实只需要将其分成奇数列和偶数列两个部分即可。请注意为了方便表示，计数是从 0 开始的。

$n = 4$ 的例子

考察 $M_4(\omega)$，这里 ω 我们认作是 4 次单位根，即 $\omega = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$。

对于 $M_4(\omega) \cdot C$ 的过程，当我们将 $M_4(\omega)$ 的奇数列和偶数列分开来写可得：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega^4 & \omega^2 & \omega^6 \\ 1 & \omega^6 & \omega^3 & \omega^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

我们来逐一计算一下每一列的值，可以观察到这个计算跟 $M_2(\omega^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 \end{bmatrix}$ 息息相关。

$n = 4$ 的例子 (II)

- 计算 r_0(重新排列后的第 1 行):

$$r_0 = 1 \cdot c_0 + 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_3 = M_2(\omega^2) \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \end{bmatrix} (1) + \omega^0 \cdot M_2(\omega^2) \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} (1).$$

- 计算 r_2 :(重新排列后的第 2 行)::

$$r_2 = 1 \cdot c_0 + \omega^2 \cdot c_2 + \omega \cdot c_1 + \omega^3 \cdot c_3 = M_2(\omega^2) \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \end{bmatrix} (2) + \omega^1 \cdot M_2(\omega^2) \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} (2)$$

- 计算 r_1(重新排列后的第 3 行)::

$$r_1 = 1 \cdot c_0 + \omega^4 \cdot c_2 + \omega^2 \cdot c_1 + \omega^6 \cdot c_3 = M_2(\omega^2) \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \end{bmatrix} (1) + \omega^2 \cdot M_2(\omega^2) \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} (1)$$

- 计算 r_3(重新排列后的第 4 行)::

$$r_3 = 1 \cdot c_0 + \omega^6 \cdot c_2 + \omega^3 \cdot c_1 + \omega^9 \cdot c_3 = M_2(\omega^2) \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \end{bmatrix} (2) + \omega^3 \cdot M_2(\omega^2) \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} (2).$$

由上述例子可以看到，对于 $M_n(\omega)$（这里 ω 表示 n 次单位根 $e^{i\frac{2\pi}{n}}$）当我们将奇数列和偶数列分开来表示的时候，第 j 行 r_j 的计算实际上可以转化为下列表达式：

$$M_{\frac{n}{2}}(\omega^2)\cdot\begin{bmatrix}c_0\\c_2\\\vdots\\c_{n-2}\end{bmatrix}+\omega^j\cdot M_{\frac{n}{2}}(\omega^2)\cdot\begin{bmatrix}c_1\\c_3\\\vdots\\c_{n-1}\end{bmatrix}$$

注意到$\omega^{j+\frac{n}{2}}=\omega^{\frac{n}{2}}\cdot\omega^j=-\omega^j$。因此对于 $M_n(\omega)$ 的计算，可以转化成两个规模为 $\frac{n}{2}$ 的子问题：

- $M_{\frac{n}{2}}(\omega^2)\cdot\begin{bmatrix}c_0\\c_2\\\vdots\\c_{n-2}\end{bmatrix}$. 和 $M_{\frac{n}{2}}(\omega^2)\cdot\begin{bmatrix}c_1\\c_3\\\vdots\\c_{n-1}\end{bmatrix}$.

FFT 的电路表示

让我们简单总结一下上述的过程，如果令

$$M_{\frac{n}{2}}(\omega^2) \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \end{bmatrix} \text{. 算出的结果为} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{\frac{n}{2}-1} \end{bmatrix}, M_{\frac{n}{2}}(\omega^2) \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \text{. 算出的结果为} \begin{bmatrix} s'_0 \\ s'_1 \\ \vdots \\ s'_{\frac{n}{2}-1} \end{bmatrix}$$

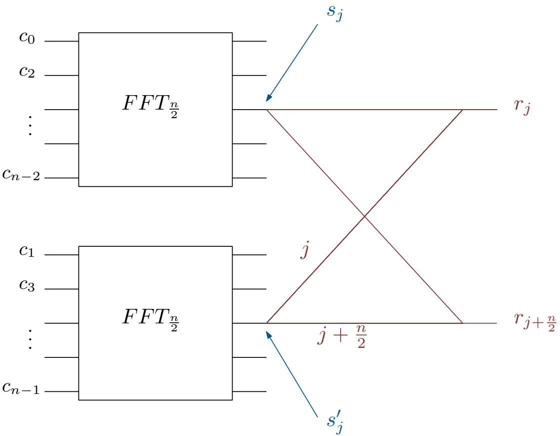
则对于 $\forall j \in [0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1]$，我们有：

$$r_j = s_j + \omega^j s'_j \tag{1}$$

$$r_{j+\frac{n}{2}} = s_j - \omega^j s'_j \tag{2}$$

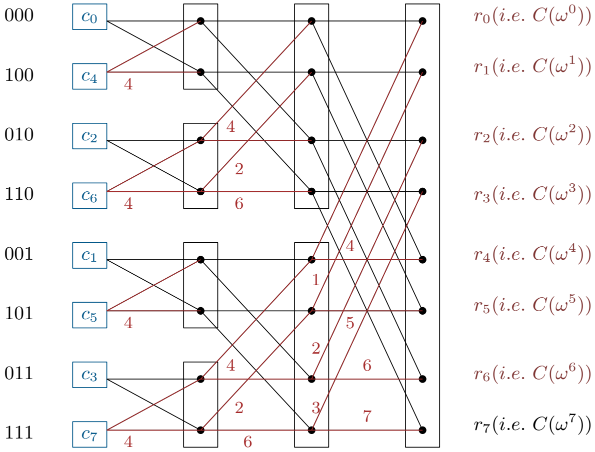
FFT 的电路表示

等式1和等式2可以用如下的蝴蝶式的线路样式表示:



- 边表示复数，两条边交汇表示将相应的复数进行相加。
- 边上的标记 j 表示对应的权重 ω^j.

$n = 8$ 的展开



- 对于 n 个输入，一共有 $\log n$ 层，每层 n 个节点，共 $n \log n$ 次操作。
- 输入按特定形式排列，即按 $\log n$ 位的二进制从左往右计数排列。($n = 8$ 时为 $0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7$)

课堂总结

本节内容

- 多项式的两种表示方法
    - 系数表示法。
    - 插值表示法。
- 多项式乘法算法-快速傅立叶变换
- 快速傅立叶变换的内部机制。