《算法设计与分析》

7-最短路径 (Shortest Path)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 11 月 1 日

主要内容

- 最短路径问题介绍
- 单源最短路径
- 所有节点对的最短路径问题

最短路径问题介绍

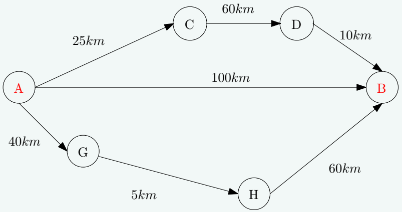
在上节课中，我们介绍了 BFS 可以求得图中的最短路径。但是，这是基于图中所有边的**权重都是相同的**而得出的。

现实生活中的图不同的边可能是有不同的距离。

地图上的距离

如右图所示，假设你现在要从 A 地去往 B 地，各个路段的距离如图所示。

哪条路径是最短的呢?



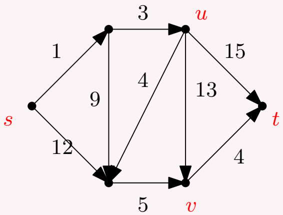
我们引入**带权重的图 (weighted graph)**这一概念。

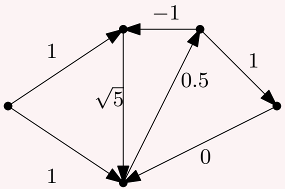
定义 1 **[带权重的图].**

一个带权重的有向图可以表示为 $G = (V, E, \omega)$，其中 (V, E) 是一个有向图，$\omega : E \to \mathbb{R}$ 是一个边上的权重函数，其给每条边赋予了一个权重。

例 2.

下列给出了几个带权重的有向图的例子，其中边上的标注即是这条边的权重。





现在我们定义上面两个点的最短路径。

定义 3 **[最短路径].**

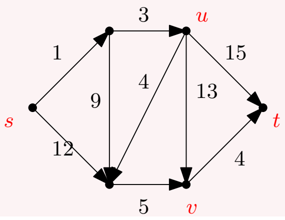
给定一张带权重的图 $G=(V,E)$ 和上面的两个点 u, v，图上的一条路径 π 可以由其经过的节点序列所表示，即 $\pi =< u_1,\ldots,u_n >$，其权重 $\omega(\pi)$ 定义为构成该路径所有边之和，则我们可以定义 u 到 v 的最短路径权重 $\omega(u,v)$ 为：

$$\omega(u,v)=\begin{cases}\infty & \text{如果不存在 } u \text{ 到 } v \text{ 的路径}\\ \min \omega(\pi): u \xrightarrow{\pi} v & \text{如果存在 } u \text{ 到 } v \text{ 的路径}\end{cases}$$

例 4.

在上述例子的左图当中，我们有：

- $\omega(s,u)=4, \omega(s,v)=13.$
- $\omega(s,t)=17.$



最短路径问题的一些变种

上海师范大学 Shanghai Normal University

最短路径问题存在若干变种:

- 单源最短路径问题。
- 单目的地最短路径问题
- 单节点对最短路径问题。
- 所有节点对的最短路径问题。

最短路径的一个核心性质便是，最短路径的任何子路径也是最短路径。

定理 5.

给定带权重的有向图 $G=(V,E,\omega)$，设 $\pi=<v_0,\ldots,v_k>$ 是一条从 v_0 到 v_k 的最短路径，并定义 $\pi_{ij}=<v_i,\ldots,v_j>$。则 p_{ij} 是 v_i 到 v_j 的最短路径。

证明. 假设存在 i,j 使得 π_{ij} 不是 i 到 j 的最短路径，则令其最短路径为 $\pi'_{ij}=<v_i,u_1,\ldots,u_m,v_j>$。由定义我们有 $\omega(\pi'_{ij})<\omega(\pi_{ij})$。考察如下的 u 到 v 的一条路径 π':

$$\pi'=<v_0,\ldots,v_{i-1},v_i,u_1,\ldots,u_m,v_j,\ldots,v_k>$$

则我们有:

$$\omega(\pi')=\omega(\pi_{1i})+\omega(\pi'_{ij})+\omega(\pi_{j,k})<\omega(\pi)$$

即 π' 是一条更短的路径，与假设矛盾。 $\square$

一个最短路径是否会存在一个圈?

不可能。

- 如果存在一个权重大于 0 的圈，则删掉这个圈会得到一个更短的路径。
- 如果存在一个权重等于 0 的圈，则这个圈存在与否不会影响最短路径的权重。
- 如果存在一个权重小于 0 的圈，则最短路径的定义没有意义，因为每走一次负圈，路径权重就会减小。

推论 6.

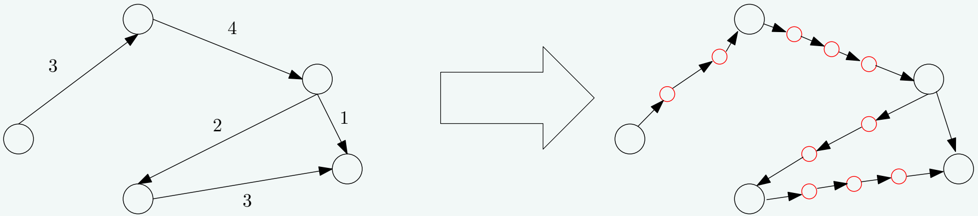
给定一个 n 个点的带权重的有向图，任何最短路径最多经过 $n-1$ 条不同的**边**。

单源最短路径

BFS 回顾

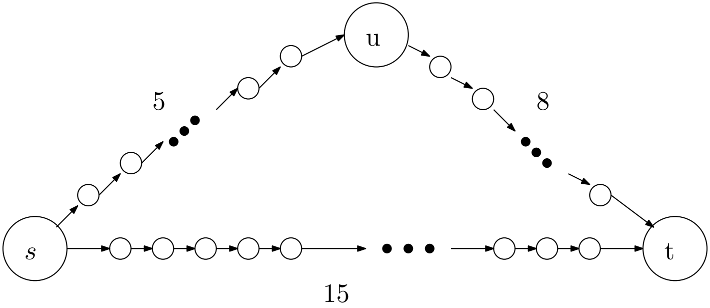
我们说过，BFS 可以求得权重一致的图中的最短路径。那有没有办法使得一个带权重的图变成权重一致的情况那？考虑权重全是正整数的的情况。

增加虚拟节点



松弛操作

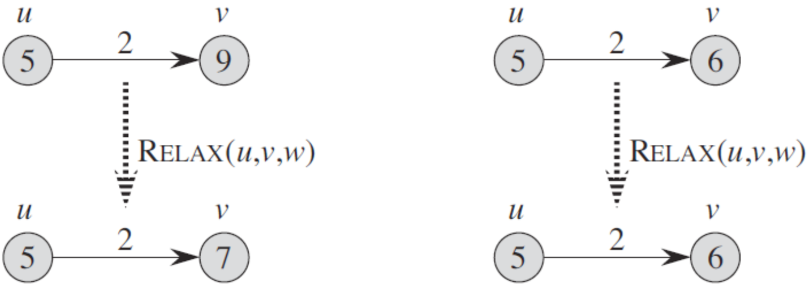
再来考虑以下虚拟节点和真正节点的作用区别。



- 当访问到真正的节点的时候路径长度才起到作用。
- (u, t) 这条边会对 s 到 t 的路径产生优化作用。

松弛操作 (Relax)

假设 s 出发到其余各个点已经存在了一条路径，则我们称一条边 (u, v) 的松弛操作是指，如果存在一条从 s 到 u 的路径，使得其权重加上 (u, v) 的权重小于从 s 到 v 的路径，则我们可以用这条路径来更新 s 到 v 的路径。



$$\lambda[v] = \min\{\lambda[v], \lambda[u] + \omega((u, v))\}$$

当权重都为**正数**的时候，考察 s 到 t 的任何一条最短路径:

$$s \to u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_k \to t$$

记 $t = u_{k+1}$，我们有如下观察事实:

事实 7.

对于任意的 $i \in [1, k]$，我们有 $\omega(s, u_i) \leqslant \omega(s, u_{i+1})$，也就是说 u_i 对于 u_{i+1} 说一定是距离 s 更近的点。

因此我们有了个简单的想法:

- 每次找到还未考虑过的目前距离 s 最近的点，并用该点连出去的边去考虑松弛操作。

这就是Dijkstra 算法的思想。

Dijkstra 算法

算法：Dijkstra

输入： 含权有向图 $G=(V,E)$，$V=\{1,2,\ldots,n\}$

输出： G 中顶点 1 到其余各个顶点的最短路径长度

$X=\{1\}$, $Y \leftarrow V-\{1\}$, $\lambda[1] \leftarrow 0$

for $y \leftarrow 2$ to n **do**

 if $(1,y) \in E$ **then**

  $\lambda[y] \leftarrow \omega(1,y)$

 else

  $\lambda[y] \leftarrow \infty$

while $Y \neq \emptyset$ **do**

 从 Y 中选取一个点 u，使得 $\lambda[u]=\min_{y\in Y}\lambda[y]$

 $X \leftarrow X \cup \{u\}$, $Y \leftarrow Y-\{u\}$

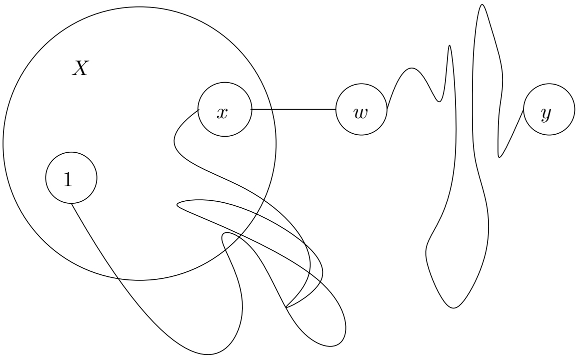
 for $y \in Y$ **do**

  if $(u,y) \in E$ **then**

   $\lambda[y] \leftarrow \min\{\lambda[y], \lambda[u]+\omega(u,y)\}$

算法正确性的直观解释

我们要证明，每次第 8 步有顶点 y 选中时，这个时候的$\lambda[y]$ 就是 $\omega(1,y)$ 的值。



证明的**核心**在于，如果到 y 的最短路径上有别的 X 外的点，则该点对应的值一定是 $\omega(1,x)$。

上海师范大学 Shanghai Normal University

定理 8.

在上述算法 Dijkstra 的过程中，当第 8 步的点 y 被选中时，我们有:$\lambda[y] = \omega(1, y)$.

证明. 我们对顶点离开集合 Y 的顺序进行归纳。第一个离开的点是 1，从而 $\lambda[1] = \omega(1, 1)$

假设 u_k 是第 k 个离开的点，定理对前 k 个点都有 $\lambda[u_k] = \omega(1, u_k)$。

考虑第 $k+1$ 个离开的点 y，令

$$\pi =< 1, \ldots, x, w, \ldots, y >$$

是 1 到 y 的最短路径，其中 x 是在 y 前最迟离开 Y 的顶点。

$$\lambda[y] \leqslant \lambda[w] \leqslant \lambda[x] + \omega(x, w) = \omega(1, x) + \omega(x, w) = \omega(1, w) \leqslant \omega(1, y)$$

从而结论成立。 □

我们先从边的数目 $|E| = m$ 和顶点的数目 $|V| = n$ 进行对算法的分析。

- 2-6 行要遍历所有的顶点一次，因此时间复杂性是 $O(n)$。
- 算法第 8 步每次要找到最小的 $\lambda[y]$，因此总共需要的执行时间是 $O(n^2)$。
- 算法 10-12 步的循环恰好对每条边都执行了一次，因此总共需要的执行时间是 $O(m)$。

定理 9.

给定一个含有 n 个顶点和 m 条边的带权重的有向图，Dijkstra 算法可以在 $O(n^2 + m) = O(n^2)$ 的时间内计算出从顶点 1 到其余各个顶点的最短路径长度。

算法的提升-数据结构的实现

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们可以发现，导致算法是 $O(n^2)$ 的原因是每次第 8 步要找出最小的 $\lambda[y]$。

有什么办法可以使得这一步速度变快?

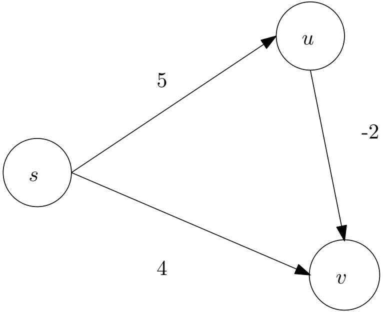
使用堆!

- 当使用二分堆时，每次可以通过 $O(1)$ 的时间获取当前的最小值，而对于堆的修改操作至多进行 $m+n+1$ 次，而每个堆运算都需要 $O(\log n)$ 的时间，因此总的时间复杂性是 $O(m\log n)$。
- 如果使用二分堆的推广-d 堆，如果图时稠密的，即 $m \geqslant n^{1+\epsilon}$，通过合适的 d 的选取，我们可以将结果提升至 $O(\frac{m}{\epsilon})$.

算法的局限性-不能带有负边

Dijkstra 算法的局限性是不能存在有负权重的边。

- 从 s 出发第一次会将 v 放进去。
- 从 s 出发第二次会将 u 放进去。
- ω[v] 的值会在第一次确定。



对负边失效的原因

Dijkstra 算法一个重要的性质是，从起始点到任意点的最短路径一定会经过比 v 距离更近的顶点。但这一性质在有负权重的时候是失效的。

- 在上述例子中，s 到 v 的最短路径首先要去一个距离更远的顶点 u。
- 在证明中，$\omega(1, w) \leqslant \omega(1, y)$不再成立。

解决方法

回顾一下 Relax 操作：

$$\lambda[v] = \min\{\lambda[v], \lambda[u] + \omega((u, v))\}$$

- 首先这一方式说明，从 s 到 v 的最短路径不可能超过s 到 u 的距离加上 (u, v) 的权重。
- 其次，当 u 是 s 到 v 的最短路径上的倒数第二个顶点并且 $\lambda[u]$ 被**正确设定**时，我们可以求得 s 到 v 的最短路径。

假设 s 到 t 的最短路径如下：

$$s \to u_1 \to \ldots \to u_k \to t$$

- 这意味着如果我们按 $(s, u_1), (s, u_2), \ldots (u_k, t)$ 的方式去松弛，我们便可以求得 s 到 t 的最短路径。这个序列的长度显然最长是 $|V| - 1$。

引理 10.

假设 s 到 t 的最短路径为 $\pi =< s = u_0, u_1, \ldots, u_{k+1} = t >$，则如果按照边 $(s, u_1), (s, u_2), \ldots (u_k, t)$ 的次序去松弛，最终获得 $\lambda[t] = \omega(\pi)$，且其他边的松弛操作不会对其产生影响。

但问题是我们预先并不知道这样的序列，怎么办？

那就**全部尝试一遍**！这就是BellmanFord 算法！

带有负边的解决-BellmanFord 算法

Shanghai Normal University 上海师范大学

算法：BellmanFord

输入： 含权有向图 $G=(V,E)$，$V=\{1,2,\ldots,n\}$

输出： G 中顶点 1 到其余各个顶点的最短路径长度

for $i=2$ to n **do**
    if (1,i) in E **then**
        $\lambda[i] \leftarrow \omega(1,i)$
    else
        $\lambda[i] \leftarrow \infty$
for $i=1$ to $n-1$ **do**
    for $(u,v)\in E$ **do**
        $\lambda[v] \leftarrow \min\{\lambda[v], \lambda[u]+\omega((u,v))\}$
for $(u,v)\in E$ **do**
    if $\lambda[v] > \lambda[u]+\omega((u,v))$ **then**
        return ”存在负圈”

时间复杂性：$O(nm)$!

算法的正确性可以通过之前的讨论获得。我们最后再讨论一个问题:

为什么松弛了 $|V|-1$ 轮之后如果还能松弛成功，就说明图中存在负圈?

- 因为如果路径长度 $\geqslant |V|$，那路径中一定包含一个圈!

引理 11.

BellmanFord 算法可以在 $O(nm)$ 的时间内判断是否存在负圈，如果不存在负圈的话则计算出从顶点 1 到其余各个顶点的最短路径长度。

所有节点对的最短路径问题

所有节点对的最短路径问题

上海师范大学 Shanghai Normal University

前面计算了单源的最短路径问题。那么如果我们想要计算所有节点对的最短路径问题呢?

	s	v_1	$\cdots$	v_n
s	?	?	$\cdots$	?
v_1	?	?	$\cdots$	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
v_n	?	?	$\cdots$	?

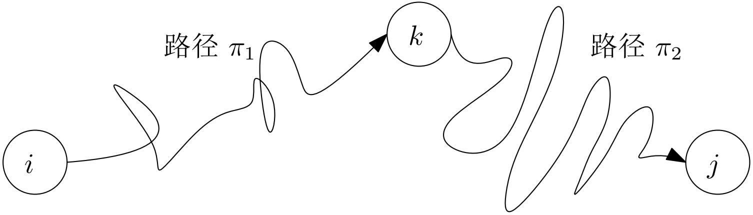
Versus

	s	v_1	$\cdots$	v_n
s	?	?	$\cdots$	?
v_1			$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
v_n			$\cdots$	

当然我们可以执行 n 次 BellmanFord 算法。这需要$O(n^2m)$的时间。

我们下面来介绍一个更快的算法-Floyd 算法。

- 考虑一个从 i 到 j 的只经过 $1 \sim k$ 个顶点的最短路径，它一定是如下的形式:



  - 其中 π_1 是 i 到 k 的只经过 $1 \sim k-1$ 个顶点的最短路径.
  - 其中 π_2 是 k 到 j 的只经过 $1 \sim k-1$ 个顶点的最短路径.

Floyd 算法的状态转移方程

上海师范大学 Shanghai Normal University

从而令 $d_{i,j}^{k}$ 表示从 i 到 j 的只经过 $1 \sim k$ 个顶点的最短路径长度，则我们有：

$$d_{i,j}^{k} = \begin{cases} \omega(i,j) & \text{如果 } k = 0 \text{ 且 } (i,j) \in E \\ \infty & \text{如果 } k = 0 \text{ 且 } (i,j) \notin E \\ \min\{d_{i,j}^{k-1}, d_{i,k}^{k-1} + d_{k,j}^{k-1}\} & \text{如果 } k \geqslant 1 \end{cases}$$

根据该方程和 k 的值依次更新所有的 $d_{i,j}^{k}$，便可以得到一个求所有节点的最短路径的算法。

上海师范大学 Shanghai Normal University

算法:Floyd

输入: 用 $n \times n$ 矩阵表示的图 I，其中 I_{ij} 表示边 (i,j) 的权重，不存在的边权重为 ∞。

输出: $n \times n$ 矩阵 D，其中 D_{ij} 表示从 i 到 j 的最短路径长度。

```
1: D ← I
2: for k = 1 to n do
3:     for i = 1 to n do
4:         for j = 1 to n do
5:             D_ij ← min{D_ij, D_ik + D_kj}
```

显然这是一个$O(n^3)$的算法, 比调用 n 次 BellmanFord 算法要快!（**为什么?**）

总结

上海师范大学 Shanghai Normal University

本节内容

- 单源最短路径
  - Dijkstra 算法
  - BellmanFord 算法
- 所有节点对最短路径
  - Floyd 算法