

## 第一周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 9 月 23 日

截止日期 2025 年 9 月 29 日晚 24: 00

1. 用 True 或者 False 填空:

| $f(n)$         | $g(n)$                  | $f = O(g)$ | $f = o(g)$ | $f = \Omega(g)$ | $f = \Theta(g)$ | $f = \omega(g)$ |
|----------------|-------------------------|------------|------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $n^3 + 3n$     | $100n^2 + 2n + 100$     |            |            |                 |                 |                 |
| $50n + \log n$ | $10n + \log \log n$     |            |            |                 |                 |                 |
| $50n^2 \log n$ | $10n(\log n)^3$         |            |            |                 |                 |                 |
| $n + \log n$   | $\log^{100} n + \log n$ |            |            |                 |                 |                 |
| $n!$           | $2^n + n^{100}$         |            |            |                 |                 |                 |

2. 考虑如下算法 COUNT6:

算法: COUNT6

输入: 正整数  $n$ 输出: 第 6 步的执行次数  $count$ 

```

1:  $count \leftarrow 0$ 
2: for  $i \leftarrow 1$  to  $\lfloor \log n \rfloor$  do
3:   for  $j \leftarrow i$  to  $i + 5$  do
4:     for  $k \leftarrow 1$  to  $i^2$  do
5:        $count \leftarrow count + 1$ 
6:     end for
7:   end for
8: end for

```

(1) 第 5 步执行了多少次?

(2) 该算法的时间复杂性是什么?

3. 请找到两个单调递增函数  $f(n)$  和  $g(n)$ , 使得  $f \neq O(g)$  并且  $g \neq O(f)$ 。

4. 考虑如下的一个算法 EUCLID:

算法: EUCLID

输入: 两个正整数  $a, b$

输出:  $\gcd(a, b)$

1: **repeat**

2:    $r \leftarrow b \bmod a$

3:    $b \leftarrow a$

4:    $a \leftarrow r$

5: **until**  $a = 0$

6: **return**  $b$

(1) 假定  $b \geq a$ , 用  $b$  来表示该算法的运行时间。

(2) 这个算法的时间复杂性是什么?

Remark 0.1

这个算法实际上就求最大公约数的辗转相除法, 当然我们这里省去了对其正确性的证明。

5. (鸡蛋掉落) 假设现在有一幢  $N$  层高的楼和一些鸡蛋。对于这些鸡蛋来说, 存在一层楼  $T$ , 使得当这些鸡蛋从  $T$  层楼或更高的楼层摔落下去时鸡蛋会碎, 反之鸡蛋则不会碎。你现在的目标是在下述条件下设计算法找到这个楼层  $T$ :

- (1) 你只有 1 个鸡蛋, 但有  $T$  次机会。
- (2) 你有  $\log N$  个鸡蛋和  $\log N$  次机会。
- (3) 你有  $\log T$  个鸡蛋和  $2 \log T$  次机会。
- (4) 你有 2 个鸡蛋和  $2\sqrt{N}$  次机会。
- (5) 你有 2 个鸡蛋和  $c\sqrt{T}$  次机会, 这里  $c$  是一个与  $T, N$  无关的常数。

Remark 0.2

这是个很经典的问题, 但我还是希望大家先自己尝试思考一下。