

## 第十次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 12 月 3 日

**截止日期** 2025 年 12 月 8 日晚 24: 00

**重要提醒：** 请邮件提交的同学严格按照第一个课件上的要求，平时作业请在邮件提交一个名为“**学号-姓名-算法第 10 次平时作业**”的 pdf 文件作为你的作业，编程作业请在邮件提交一个名为“**学号-姓名-算法第 10 次编程作业**”的 pdf 文件作为你的作业，邮件标题也请写成“**学号-姓名-算法第 10 次平时(编程) 作业提交**”。

1. 设  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  是两个问题，且  $\Pi_1 \propto_{\text{poly}} \Pi_2$ 。假设问题  $\Pi_2$  能在  $O(n^k)$  时间内解出，并且归约可以在  $O(n^j)$  时间内完成。证明问题  $\Pi_1$  可以在  $O(n^{jk})$  时间内求解出。
  
2. 课上已经说过，团问题是 NP 完全的，现在我们考虑其一个子问题，即顶点度数不超过 3 的团问题，我们称其为 Clique-3：
  - (1) 证明 Clique-3 是 NP 问题？
  - (2) 请指出下列证明 Clique-3 是 NP 完全问题的错误之处：

我们知道一般的团问题是 NP-完全的，因此仅需要找打一个由 Clique-3 到团问题的归约。给定一个顶点度数不超过 3 的图  $G$  和参数  $k$ ，归约保持该图和参数不变；显然归约的输出是团问题的一个可能输入。此外，两个问题的解相同。这样就证明了归约的正确性，从而 Clique-3 是 NP-完全的。
  - (3) 尝试给出一个对 Clique-3 问题的算法，它是多项式的么？

3. **独立集问题 (Independent Set)**: 图的独立集指的是顶点的一个子集  $V'$ , 满足图中的每条边至多与  $V'$  的一个点相关联。独立集问题是指给定一个图  $G$  和参数  $k$ , 判断是否存在一个独立集  $V'$ , 使得  $|V'| \geq k$ 。证明独立集问题是 NP 完全的。

(Hint: 尝试用团问题去归约。)

4. 给定有向图  $G = (V, E)$ , 子集  $E' \subseteq E$  称为一个反馈弧集合是指, 将其移除后使得图  $G$  变成一个无环图。

反馈弧集合问题 (FAS): 给定有向图  $G = (V, E)$  和  $b$ , 是否存在一个大小不超过  $b$  的反馈弧集合?

- (1) 请证明 FAS 问题是 NP 问题。  
(2) 现在请证明其是 NP 完全问题。

(Hint: 尝试用顶点覆盖问题去归约。)

5. **吝啬 SAT 问题 (Stingy SAT)**: 我们考察这样一个受限的 SAT 问题, 给定一个合取范式  $f$  和整数  $k$ , 是否存在一个至多有  $k$  个变量赋值为真的赋值使得公式  $f$  为真? 证明该问题是 NP 完全的。