

第十次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 12 月 3 日

截止日期 2025 年 12 月 8 日晚 24: 00

重要提醒： 请邮件提交的同学严格按照第一个课件上的要求，平时作业请在邮件提交一个名为“**学号-姓名-算法第 10 次平时作业**”的 pdf 文件作为你的作业，编程作业请在邮件提交一个名为“**学号-姓名-算法第 10 次编程作业**”的 pdf 文件作为你的作业，邮件标题也请写成“**学号-姓名-算法第 10 次平时(编程) 作业提交**”。

1. 设 Π_1 和 Π_2 是两个问题，且 $\Pi_1 \propto_{\text{poly}} \Pi_2$ 。假设问题 Π_2 能在 $O(n^k)$ 时间内解出，并且归约可以在 $O(n^j)$ 时间内完成。证明问题 Π_1 可以在 $O(n^{jk})$ 时间内求解出。
2. 课上已经说过，团问题是 NP 完全的，现在我们考虑其一个子问题，即顶点度数不超过 3 的团问题，我们称其为 Clique-3:

(1) 证明 Clique-3 是 NP 问题?

(2) 请指出下列证明 Clique-3 是 NP 完全问题的错误之处:

我们知道一般的团问题是 NP-完全的，因此仅需要找打一个由 Clique-3 到团问题的归约。给定一个顶点度数不超过 3 的图 G 和参数 k ，归约保持该图和参数不变；显然归约的输出是团问题的一个可能输入。此外，两个问题的解相同。这样就证明了归约的正确性，从而 Clique-3 是 NP-完全的。

(3) 尝试给出一个对 Clique-3 问题的算法，它是多项式的么?

3. **独立集问题 (Independent Set):** 图的独立集指的是顶点的一个子集 V' ，满足图中的每条边至多与 V' 的一个点相关联。独立集问题是指给定一个图 G 和参数 k ，判断是否存在一个独立集 V' ，使得 $|V'| \geq k$ 。证明独立集问题是 NP 完全的。

(Hint: 尝试用团问题去归约。)

4. 给定有向图 $G = (V, E)$ ，子集 $E' \subseteq E$ 称为一个反馈弧集合是指，将其移除后使得图 G 变成一个无环图。

反馈弧集合问题 (FAS): 给定有向图 $G = (V, E)$ 和 b ，是否存在一个大小不超过 b 的反馈弧集合?

(1) 请证明 FAS 问题是 NP 问题。

(2) 现在请证明其是 NP 完全问题。

(Hint: 尝试用顶点覆盖问题去归约。)

5. **吝啬 SAT 问题 (Stingy SAT):** 我们考察这样一个受限的 SAT 问题，给定一个合取范式 f 和整数 k ，是否存在一个至多有 k 个变量赋值为真的赋值使得公式 f 为真? 证明该问题是 NP 完全的。