

## 第三次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 10 月 10 日

**截止日期** 2025 年 10 月 20 日晚 24: 00

1. 考虑算法 SlowMinmax, 它是将算法 Minmax 的检验条件  $\text{if high} - \text{low} = 1$  修改为  $\text{if high} = \text{low}$ , 并对此算法做一些相应改变而得出的。这样, 在算法 SlowMinmax 中, 当输入数组的大小为 1 时, 递归停止。计算由此算法找出数组  $A[1, \dots, n]$  中的最大值和最小值所需要的比较次数, 这里  $n$  是 2 的幂。并解释为什么此算法的比较次数大于算法 Minmax 的比较次数。

**Hint:** 在这种情形下, 初始条件是  $C(1) = 0$

2. 求解下列递推式, 并针对每个递推式给出一个  $\Theta$  界限:

(1)  $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + O(n)$

(2)  $T(n) = 9T(\frac{n}{2}) + 2n^3$

(3)  $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + 3$

3. 给定  $n$  个元素互不相同的整数数组  $A[1, \dots, n]$  和整数  $k (1 \leq k \leq n)$ , 现在希望返回该数组中前  $k$  小的元素, 一个很自然的算法是先对数组进行排序, 然后返回前  $k$  个元素。该算法的时间复杂度为  $O(n \log n)$ , 现在请设计一个时间复杂度为  $O(n)$  的算法来解决该问题。注意到, 在这里  $k$  不是常数, 因此  $O(kn)$  的算法并不符合要求。
4. 对于某个整数  $g \geq 3$ , 用  $g$  来表示算法 Select 中每组的规模, 导出用  $g$  表示的算法的运行时间。当  $g = 3, 7, 9, 11$  时, 哪个选择可以保证算法在最坏情况下执行的次数依旧是  $\Theta(n)$ ?
5. 3-SAT 问题的定义如下: 其实例是一个合取范式, 其中每个子句都包含三个变量的析取。例如,  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \neg x_5 \vee x_6)$ , 其中  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  是布尔变量。3-SAT 问题是判断是否存在一种赋值方式, 使得合取范式为真。

在课程的后半段, 我们会知道该问题是一个 NP 完全问题。现在, 考虑一个其受限的版本, 假设将其变量从  $1, \dots, n$  编号, 公式中的每个子句包含变量的编号差异在  $\pm 10$  以内。请给出一个线性时间的算法, 判断这样的公式是否是可满足的。