

第三次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 10 月 10 日

截止日期 2025 年 10 月 20 日晚 24: 00

1. 考虑算法 SlowMinmax，它是将算法 Minmax 的检验条件 `if high - low = 1` 修改为 `if high = low`，并对此算法做一些相应改变而得出的。这样，在算法 SlowMinmax 中，当输入数组的大小为 1 时，递归停止。计算由此算法找出数组 $A[1, \dots, n]$ 中的最大值和最小值所需要的比较次数，这里 n 是 2 的幂。并解释为什么此算法的比较次数大于算法 Minmax 的比较次数。

Hint: 在这种情形下，初始条件是 $C(1) = 0$

2. 求解下列递推式，并针对每个递推式给出一个 Θ 界限：

- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + O(n)$
- $T(n) = 9T\left(\frac{n}{2}\right) + 2n^3$
- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 3$

3. 给定 n 个元素互不相同的整数数组 $A[1, \dots, n]$ 和整数 $k (1 \leq k \leq n)$ ，现在希望返回该数组中前 k 小的元素，一个很自然的算法是先对数组进行排序，然后返回前 k 个元素。该算法的时间复杂度为 $O(n \log n)$ ，现在请设计一个时间复杂度为 $O(n)$ 的算法来解决该问题。注意到，在这里 k 不是常数，因此 $O(kn)$ 的算法并不符合要求。

4. 对于某个整数 $g \geq 3$ ，用 g 来表示算法 Select 中每组的规模，导出用 g 表示的算法的运行时间。当 $g = 3, 7, 9, 11$ 时，哪个选择可以保证算法在最坏情况下执行的次数依旧是 $\Theta(n)$ ？

5. 3-SAT 问题的定义如下：其实例是一个合取范式，其中每个子句都包含三个变量的析取。例如， $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee \neg x_5 \vee x_6)$ ，其中 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 是布尔变量。3-SAT 问题是判断是否存在一种赋值方式，使得合取范式为真。

在课程的后半段，我们会知道该问题是一个 NP 完全问题。现在，考虑一个其受限的版本，假设将其变量从 $1, \dots, n$ 编号，公式中的每个子句包含变量的编号差异在 ± 10 以内。请给出一个线性时间的算法，判断这样的公式是否是可满足的。