算法设计与分析 Week 4

第四次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 10 月 21 日

截止日期 2025 年 10 月 27 日晚 24：00

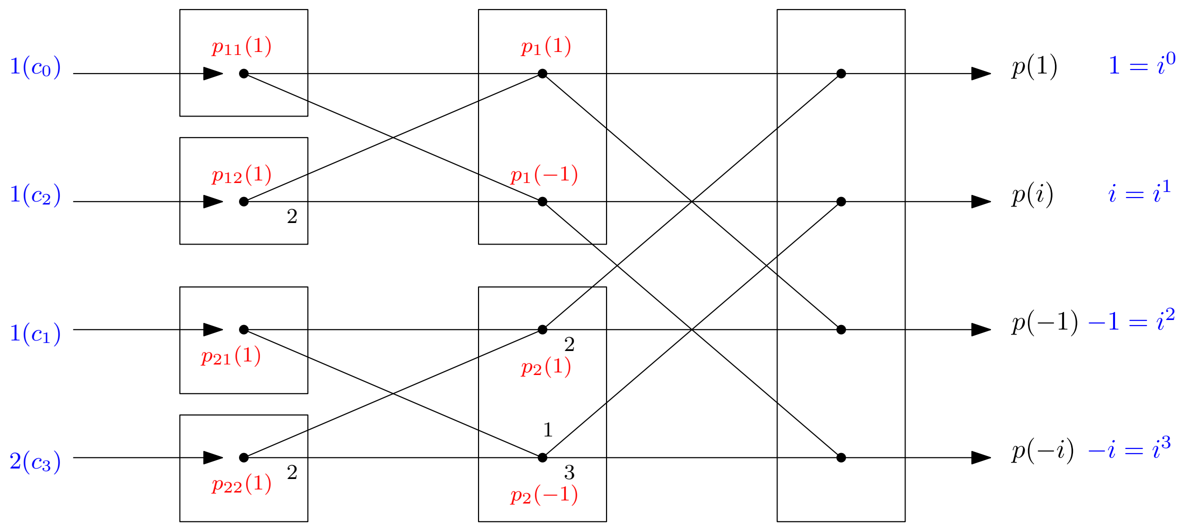
1. 我们再通过一个具体的例子来理解 FFT 的内部细节。考虑多项式 $p(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3$，我们计算其在 $i, -1, -i, 1$ 处的值 (就是 $z^4 = 1$ 的四个单位根)。注意到:

$$p(x) = (1 + x^2) + (x + 2x^3) = p_1(x^2) + xp_2(x^2)$$

其中 $p_1(x) = 1 + x$ 和 $p_2(x) = 1 + 2x$。从而我们可以通过计算 $p_1(x), p_2(x)$ 在 $1, -1$ 的值来得到 $p(x)$ 在 $i, -1, -i, 1$ 处的值。更进一步，比如考虑 $p_2(x)$，其可以表示为:

$$p_2(x) = 1 + 2x = 1 + x \cdot 2$$

令 $p_{21}(x) = 1, p_{22}(x) = 2$，则计算 $p_2(x)$ 在 $1, -1$ 的值等于计算 $p_{21}(x), p_{22}(x)$ 在 1 的值。此时需要计算的点只剩了 1 一处，直接计算 $p_{21}(1), p_{22}(1)$ 即可。同理可通过 $p_{11}(x)$ 和 $p_{12}(x)$ 在 1 处的值来得到 $p_1(x)$ 在 $-1, 1$ 处的值，进而可以得到 $p(x)$ 在 $i, -1, -i, 1$ 处的值。上述过程可用如下的图来进行表示:



可以看到:

- 红字来表示出了每个点所算对应算出的值。
- 图中的直线表示了值的传输过程，直线上的数字表示需要乘以相应的权重，如 2 表示需要乘以 i^2，则每个点的值由传输进来的值相加而成。以 $p(-i)$ 为例 (最右侧最下方的黑点)，其的值为 $p_1(-1) + i^3 \cdot p_2(-1)$。
- 分解到最后的多项式 (最左边) 就是原多项式熵的系数，我们用蓝色的字来表示，其中 c_i 表示 $p(x)$ 中 x^i 的系数。

- 可以看到，其与右边单位根的次数在二进制表示下有镜面对称的性质。

请仿照上述思路，表示利用 FFT 计算多项式 $q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + x^7$ 在 $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^7$ 这 7 个点的过程。其中 $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$，也就是满足 $z^8 = 1$ 的单位根。

2. 请给出利用第四节课件中的 $PolynomialMultiplication(A, B)$ 计算多项式 $1 + x + 2x^3$ 和 $1 + x$ 的具体运算过程，请具体指明所选用的点以及中间的运算结果。
3. 从一个最大堆中找到最小键值可能有多快?
4. 请编写一个有效的算法来测试一个给定的数组是否是一个堆。该算法的时间复杂性是多少?
5. 假设 $Find$ 和 $Union$ 操作是利用按秩合并的方式进行的，请给出一个长度为 n 的 $Find$ 和 $Union$ 序列，使得其需要 $\Theta(n \log n)$ 的时间。这里假定元素集合是 $\{1, 2, \ldots, n\}$.