第四次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 10 月 27 日

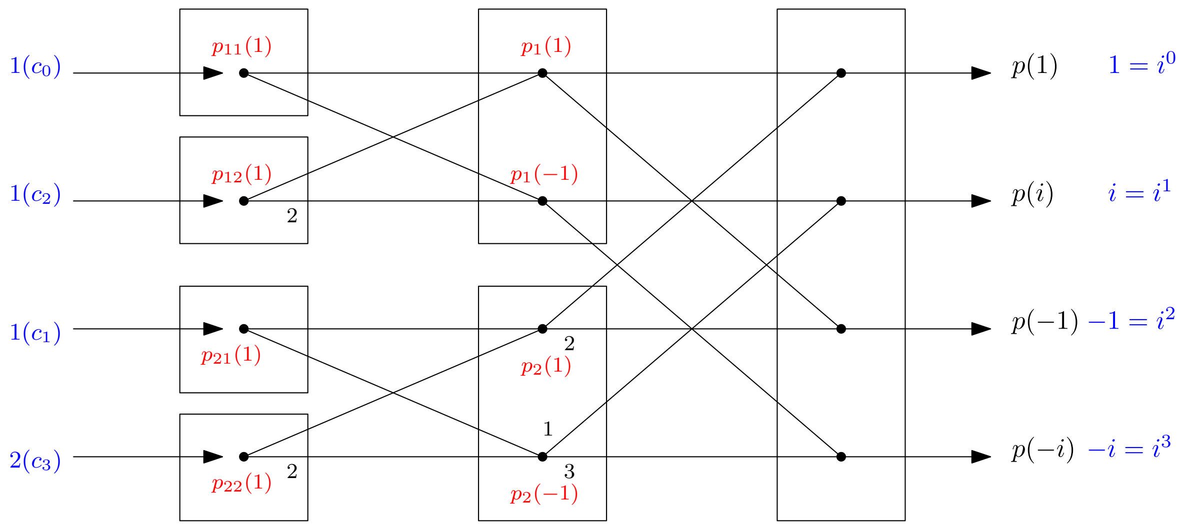
1. 我们再通过一个具体的例子来理解 FFT 的内部细节。考虑多项式 $p(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3$，我们计算其在 $i, -1, -i, 1$ 处的值 (就是 $z^4 = 1$ 的四个单位根)。注意到:

$$p(x) = (1 + x^2) + (x + 2x^3) = p_1(x^2) + xp_2(x^2)$$

其中 $p_1(x) = 1 + x$ 和 $p_2(x) = 1 + 2x$。从而我们可以通过计算 $p_1(x), p_2(x)$ 在 $1, -1$ 的值来得到 $p(x)$ 在 $i, -1, -i, 1$ 处的值。更进一步，比如考虑 $p_2(x)$，其可以表示为:

$$p_2(x) = 1 + 2x = 1 + x \cdot 2$$

令 $p_{21}(x) = 1, p_{22}(x) = 2$，则计算 $p_2(x)$ 在 $1, -1$ 的值等于计算 $p_{21}(x), p_{22}(x)$ 在 1 的值。此时需要计算的点只剩了 1 一处，直接计算 $p_{21}(1), p_{22}(1)$ 即可。同理可通过 $p_{11}(x)$ 和 $p_{12}(x)$ 在 1 处的值来得到 $p_1(x)$ 在 $-1, 1$ 处的值，进而可以得到 $p(x)$ 在 $i, -1, -i, 1$ 处的值。上述过程可用如下的图来进行表示:



可以看到:

- 红字来表示出了每个点所算对应算出的值。
- 图中的直线表示了值的传输过程，直线上的数字表示需要乘以相应的权重，如 2 表示需要乘以 i^2，则每个点的值由传输进来的值相加而成。以 $p(-i)$ 为例 (最右侧最下方的黑点)，其的值为 $p_1(-1) + i^3 \cdot p_2(-1)$。
- 分解到最后的多项式 (最左边) 就是原多项式熵的系数，我们用蓝色的字来表示，其中 c_i 表示 $p(x)$ 中 x^i 的系数。

- 可以看到，其与右边单位根的次数在二进制表示下有镜面对称的性质。

请仿照上述思路，表示利用 FFT 计算多项式 $q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + x^7$ 在 $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^7$ 这 7 个点的过程。其中 $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$，也就是满足 $z^8 = 1$ 的单位根。

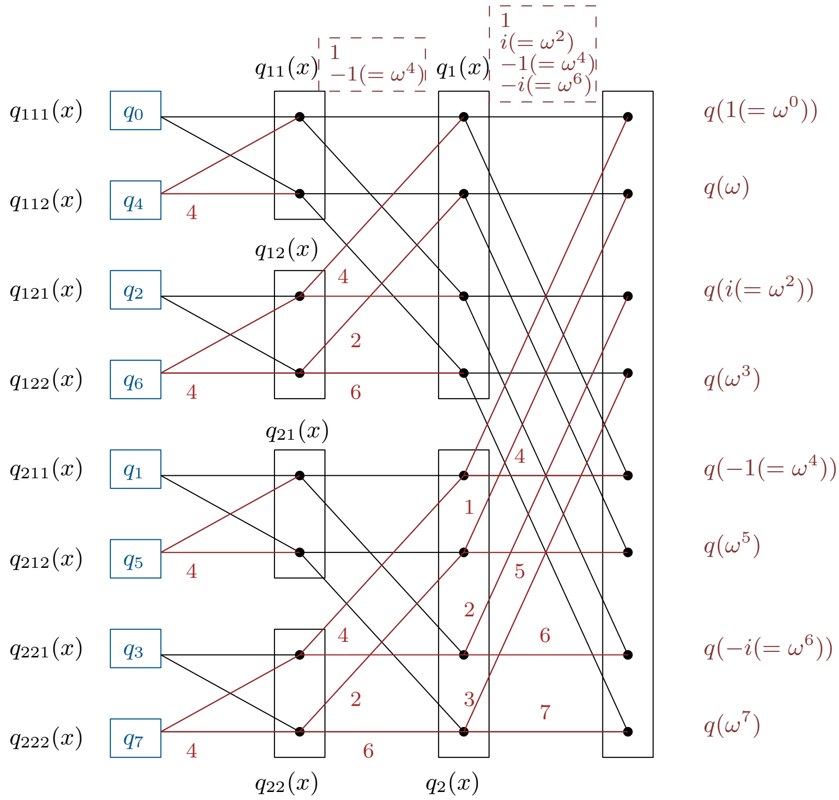
解答. $q(x)$ 在 FFT 下的计算可分解为如下的流程:

(1) $q_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3$，$q_2(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3$ 在 $1, \omega^2, \omega^4, \omega^6 (= 1, i, -1, -i)$ 处的值。

(2) $q_{11}(x) = 1 + x, q_{12}(x) = 1 + x$，$q_{21}(x) = 1 + 2x$，$q_{22}(x) = 1 + x$ 在 $1, \omega^4 (= 1, -1)$ 处的值。

(3) $q_{111}(x) = 1, q_{112}(x) = 1$，$q_{121}(x) = 1, q_{122}(x) = 1$，$q_{211}(x) = 1, q_{212}(x) = 2$，$q_{221}(x) = 1, q_{222}(x) = 1$ 在 1 处的值。

具体运算过程可如下图所示，我们用 $q_0, \dots, q_7$ 表示对应的系数 (尽管除了 $q_5 = 2$ 其他都是 1)，即 $q(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_7 x^7$:



最终可得:

$$
\begin{aligned}
q(1) &= q_1(1) + q_2(1) \\
&= (q_{11}(1) + q_{12}(1)) + (q_{21}(1) + q_{22}(1)) \\
&= ((q_{111}(1) + q_{112}(1)) + (q_{121}(1) + q_{122}(1))) + ((q_{211}(1) + q_{212}(1)) + (q_{221}(1) + q_{222}(1))) \\
&= ((1 + 1) + (1 + 1)) + ((1 + 2) + (1 + 1)) = 9 \\
q(\omega) &= q_1(\omega^2) + \omega \cdot q_2(\omega^2) \\
&= (q_{11}(-1) + \omega^2 \cdot q_{12}(-1)) + \omega(q_{21}(-1) + \omega^2 \cdot q_{22}(-1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (q_{111}(1) + \omega^4 \cdot q_{112}(1)) + \omega^2(q_{121}(1) + \omega^4 \cdot q_{122}(1)) + \omega((q_{211}(1) + \omega^4 \cdot q_{212}(1)) \\
&+ \omega^2(q_{221}(1) + \omega^4 \cdot q_{222}(1))) \\
&= (1-1) + \omega^2(1-1) + \omega((1-2) + \omega^2(1-1)) = -\omega \\
q(\omega^2) &= q_1(-1) + \omega^2 \cdot q_2(-1) \\
&= (q_{11}(1) + \omega^4 \cdot q_{12}(1)) + \omega^2(q_{21}(1) + \omega^4 \cdot q_{22}(1)) \\
&= ((q_{111}(1) + q_{112}(1)) + \omega^4(q_{121}(1) + q_{122}(1))) + \omega^2((q_{211}(1) + q_{212}(1)) \\
&+ \omega^4(q_{221}(1) + q_{222}(1))) \\
&= (1+1) - (1+1) + \omega^2((1+2) - (1+1)) = \omega^2 \\
q(\omega^3) &= q_1(-i) + \omega^3 \cdot q_2(-i) \\
&= (q_{11}(-1) + \omega^6 \cdot q_{12}(-1)) + \omega^3(q_{21}(-1) + \omega^6 \cdot q_{22}(-1)) \\
&= ((q_{111}(1) + \omega^4 \cdot q_{112}(1)) + \omega^3(q_{121}(1)) + \omega^4 \cdot q_{122}(1)) + \omega^3((q_{211}(1) + \omega^4 \cdot q_{212}(1)) \\
&+ \omega^6(q_{221}(1) + \omega^4 \cdot q_{222}(1))) \\
&= (1-1) + \omega^3(1-1) + \omega^3((1-2) + \omega^6(1-1)) = -\omega^3 \\
q(\omega^4) &= q_1(1) + \omega^4 \cdot q_2(1) \\
&= (q_{11}(1) + q_{12}(1)) + \omega^4(q_{21}(1) + q_{22}(1)) \\
&= (q_{111}(1) + q_{112}(1)) + (q_{121}(1) + q_{122}(1)) + \omega^4((q_{211}(1) + q_{212}(1)) + (q_{221}(1) + q_{222}(1))) \\
&= (1+1) + (1+1) - ((1+2) + (1+1)) = -1 (= \omega^4) \\
q(\omega^5) &= q_1(\omega^2) + \omega^5 \cdot q_2(\omega^2) \\
&= (q_{11}(-1) + \omega^2 \cdot q_{12}(-1)) + \omega^5(q_{21}(-1) + \omega^2 \cdot q_{22}(-1)) \\
&= ((q_{111}(1) + \omega^4 \cdot q_{112}(1)) + \omega^2(q_{121}(1) + \omega^4 \cdot q_{122}(1))) + \omega^5((q_{211}(1) + \omega^4 \cdot q_{212}(1)) \\
&+ \omega^2(q_{221}(1) + \omega^4 \cdot q_{222}(1))) \\
&= (1-1) + \omega^2(1-1) + \omega^5((1-2) + \omega^2(1-1)) = \omega (= -\omega^5) \\
q(\omega^6) &= q_1(-1) + \omega^6 \cdot q_2(-1) \\
&= (q_{11}(1) + \omega^4 \cdot q_{12}(1)) + \omega^6(q_{21}(1) + \omega^4 \cdot q_{22}(1)) \\
&= ((q_{111}(1) + q_{112}(1)) + \omega^4(q_{121}(1) + q_{122}(1))) + \omega^6((q_{211}(1) + q_{212}(1)) \\
&+ \omega^4(q_{221}(1) + q_{222}(1))) \\
&= (1+1) - (1+1) + \omega^6((1+2) - (1+1)) = -\omega^2 (= \omega^6) \\
q(\omega^7) &= q_1(-i) + \omega^7 \cdot q_2(-i) \\
&= (q_{11}(-1) + \omega^6 \cdot q_{12}(-1)) + \omega^7(q_{21}(-1) + \omega^6 \cdot q_{22}(-1)) \\
&= ((q_{111}(1) + \omega^4 \cdot q_{112}(1)) + \omega^3(q_{121}(1) + \omega^4 \cdot q_{122}(1))) + \omega^7((q_{211}(1) + \omega^4 \cdot q_{212}(1)) \\
&+ \omega^6(q_{221}(1) + \omega^4 \cdot q_{222}(1))) \\
&= (1-1) + \omega^3(1-1) + \omega^7((1-2) + \omega^6(1-1)) = \omega^3 (= -\omega^7)
\end{aligned}
$$

$\square$

Remark 0.1

这里是要记住 ω 的运算性质，具体来说：

$$\omega^2 = i,\ \omega^4 = -1,\ \omega^6 = -i,\ \omega^8 = \omega^0 = 1$$

希望通过这个看上去略微繁琐的计算过程可以帮助同学们理解 FFT 的内部细节。

2. 请给出利用第四节课件中的 $\text{PolynomialMultiplication}(A, B)$ 计算多项式 $1 + x + 2x^3$ 和 $1 + x$ 的具体运算过程，请具体指明所选用的点以及中间的运算结果。

解答. $\text{PolynomialMultiplication}(A, B)$ 一共分为四个阶段：

- **选择阶段**

  注意到 A 和 B 乘起来是一个次数为 4 的多项式，所以我们选择 $z^8 = 1$ 的四个单位根，即 $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.(选择 $\geqslant 4 + 1$ 的最小的 2^k 个单位根)，特别的记 $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$，则上述八个点可表示为 $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7$，其中 $\omega^2 = i,\ \omega^4 = -1,\ \omega^6 = -i$.

- **计算阶段**

  利用 FFT 分别计算 A 和 B 在 $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7$ 这四个点的值,得到 $A(1), A(\omega), A(\omega^2), A(\omega^3), A(\omega^4), A(\omega^5), A(\omega^6), A(\omega^7)$ 和 $B(1), B(\omega), B(\omega^2), B(\omega^3), B(\omega^4), B(\omega^5), B(\omega^6), B(\omega^7)$，可得：

$$\begin{aligned}
A(1) = 4, A(\omega) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i, A(\omega^2) = 1 - i, A(\omega^3) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i,\\
A(\omega^4) = -2, A(\omega^5) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i, A(\omega^6) = 1 + i, A(\omega^7) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\\
B(1) = 2, B(\omega) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, B(\omega^2) = 1 + i, B(\omega^3) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
B(\omega^4) = 0, B(\omega^5) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, B(\omega^6) = 1 - i, B(\omega^7) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i
\end{aligned}$$

- **乘法阶段**

  计算 $A(z)B(z)$ 在 $1, \omega, \ldots, \omega^7$ 这 8 个点的值,即其乘积 C 在这 8 个点 $C(1), C(\omega), C(\omega^2), C(\omega^3), C(\omega^4), C(\omega^5), C(\omega^6), C(\omega^7)$ 的值：

$$\begin{aligned}
C(1) &= A(1)B(1) = 8\\
C(\omega) &= A(\omega)B(\omega) = -1 + (2\sqrt{2} + 1)i\\
C(\omega^2) &= A(\omega^2)B(\omega^2) = 2\\
C(\omega^3) &= A(\omega^3)B(\omega^3) = -1 + (2\sqrt{2} - 1)i\\
C(\omega^4) &= A(\omega^4)B(\omega^4) = 0\\
C(\omega^5) &= A(\omega^5)B(\omega^5) = -1 - 2\sqrt{2} + i\\
C(\omega^6) &= A(\omega^6)B(\omega^6) = 2\\
C(\omega^7) &= A(\omega^7)B(\omega^7) = -1 - 2\sqrt{2} - i
\end{aligned}$$

- **插值阶段**

  利用 $C(1), C(\omega), C(\omega^2), C(\omega^3), C(\omega^4), C(\omega^5), C(\omega^6), C(\omega^7)$ 还原 C 中的系数 $c_0, c_1, \ldots, c_7$，这一部分调用的也是 FFT，即令：

  $$D(x) = C(1) + C(\omega)x + C(\omega^2)x^2 + C(\omega^3)x^3 + C(\omega^4)x^4 + C(\omega^5)x^5 + C(\omega^6)x^6 + C(\omega^7)x^7$$

  利用 FFT 计算其在 $1, \omega, \ldots, \omega^7$ 上的值，再乘以 $\frac{1}{8}$ 便是 $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_7$ 的值，最终可得：

  $$\begin{aligned}
  c_0 &= \frac{1}{8} \cdot D(1) = 1 \\
  c_1 &= \frac{1}{8} \cdot D(\omega) = 2 \\
  c_2 &= \frac{1}{8} \cdot D(\omega^2) = 1 \\
  c_3 &= \frac{1}{8} \cdot D(\omega^3) = 2 \\
  c_4 &= \frac{1}{8} \cdot D(\omega^4) = 2 \\
  c_5 &= \frac{1}{8} \cdot D(\omega^5) = 0 \\
  c_6 &= \frac{1}{8} \cdot D(\omega^6) = 0 \\
  c_7 &= \frac{1}{8} \cdot D(\omega^7) = 0
  \end{aligned}$$

  即最终多项式为：

  $$C(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + 2x^4$$

□

Remark 0.2

这里点的顺序是按 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ 而定的，还需注意 $i^{-1} = -i$.

3. 从一个最大堆中找到最小键值可能有多快？

   解答. 由于最大堆的最小值一定在叶子节点上，并且任何一个叶子节点都有可能是最小值，所以我们必须要遍历所有的叶子节点，才能确定其中的最小值。注意到叶子节点个数可能有 $\frac{n}{2}$ 个，因此时间复杂度为 $O(n)$。 □

4. 请编写一个有效的算法来测试一个给定的数组是否是一个堆。该算法的时间复杂性是多少？

   解答. 我们以判断最大堆为例：

算法: 测试数组是否是堆

输入: 数组 $A[1, \ldots, n]$
输出: 数组 A 是否是堆

```
for i = 1 to ⌊n/2⌋ do
```

```
    if A[i] < A[2i] or A[i] < A[2i + 1] then
        return False
    end if
end for
return True
```

算法需要遍历所有的非叶子节点，因此时间复杂性为 $O(n)$. □

5. 假设 $\mathtt{Find}$ 和 $\mathtt{Union}$ 操作是利用按秩合并的方式进行的，请给出一个长度为 n 的 $\mathtt{Find}$ 和 $\mathtt{Union}$ 序列，使得其需要 $\Theta(n \log n)$ 的时间。这里假定元素集合是 $\{1, 2, \ldots, n\}$.

解答. 这个实例的构造在于要让树的高度尽可能平均的增加，所以序列如下:

(1) $\mathtt{Union}(1,2), \mathtt{Union}(3,4), \ldots, \mathtt{Union}(n-1,n)$

(2) $\mathtt{Union}(1,3), \mathtt{Union}(5,7), \ldots, \mathtt{Union}(n-3,n-1)$

(3) $\mathtt{Union}(1,5), \mathtt{Union}(9,13), \ldots, \mathtt{Union}(n-7,n-3)$

(4) $\ldots$

(5) $\mathtt{Union}(1, 1+2^{k-1}), , \ldots, \mathtt{Union}(n-2^k+1, n-2^{k-1}+1)$

(6) $\mathtt{Find}(1), \mathtt{Find}(1+2^{k-1}), \ldots, \mathtt{Find}(n-2^{k-2}+1)$

由于每次 $\mathtt{Union}$ 操作都是按秩合并，所以每次合并的两个集合的秩都是相同的，从而每次合并后的秩都是原来的秩加一，因此上述第 k 轮后每次合并后的树的高度为 k，因此在第 k 次操作过后，所以每次 $\mathtt{Union}$ 操作的时间复杂度都是 $\Theta(\log k)$，所以总的时间复杂度是 $\Theta(n \log n)$. 同时不难验证，这是一个 n 次的 $\mathtt{Find}$ 和 $\mathtt{Union}$ 序列。 □

Remark 0.3

事实上，如果题目要求 $O(n)$ 的操作序列，叙述可以简单一些，但现在为了严格构出一个 n 轮的操作序列，所以需要仔细计算次数。事实上我们只需要保证在 $O(\log n)$ 次数的 $\mathtt{Find}$ 操作需要执行某个 n 的倍数次就可以了，哪怕这个倍数可能是个很小的分数。