《算法设计与分析》

8-贪心算法 (Greedy)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 11 月 6 日

主要内容

Shanghai Normal University

- 什么是贪心算法
- 贪心算法设计

什么是贪心算法

回顾：Dijkstra 算法

回顾一下 Dijkstra 算法，我们实际上每次在做这样一件事：

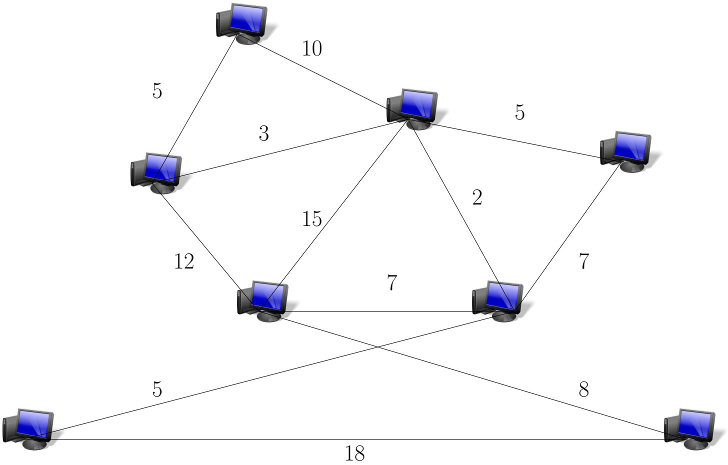
- 从 Y 中选取目前距离最近的一个点 u，并将其加入 X 中。

这其实是一个贪心的策略。

> **贪心算法**
>
> 一个贪心算法会一直去选择当前情况下最优的解。

最小生成树-问题回顾 (I)

假设你现在需要将一组计算机连接起来，你需要在这些计算机之间铺设光纤，每条光纤的长度是不同的，你需要找到一种铺设方案，使得铺设光纤的总长度最小。



最小生成树-问题回顾 (II)

问题 1.

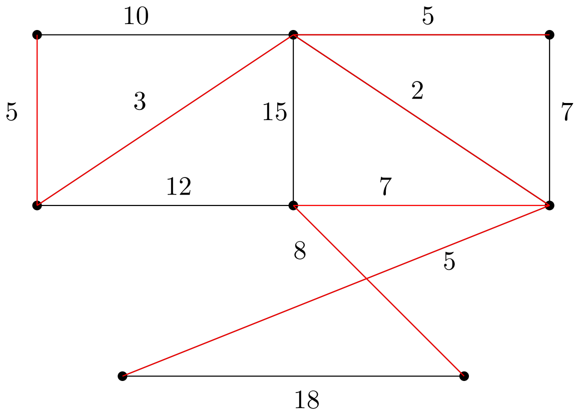
给定一个含权重的无向图 $G = (V, E, \omega)$，我们需要选出足够多的边集 T，使得在其子图 (V, T) 中任何两个顶点之间都有一条路径，且这些边的权重之和最小。

- 由于满足上述要求的子图一定不会存在一个圈，因此我们实际上求的子图是一棵树。我们称满足上述要求的子图为 G 的最小生成树。
- 我们默认 G 是连通的，否则我们的要求可以单独作用在每个连通的分图上。

最小生成树-例子

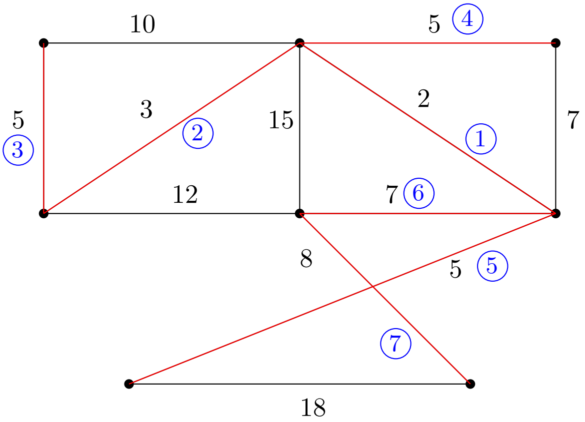
下图给出了上述例子对应的带权重无向图。

- 其中红色边集即为对应的最小生成树。



上海师范大学 Shanghai Normal University

既然要求最小权重的生成树，那我每次选取当前权重最小的边，只要保证不成圈就行。



这就是 Kruskal 算法。

算法：Kruskal

输入: 含权连通无向图 $G = (V, E)$，$V = \{1, 2, \ldots, n\}$

输出: G 生成的最小生成树所组成的边集 T

1: 按非降序的权重 E 进行排序，得到 $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$
2: $T = \emptyset$
3: **for** $i = 1$ to m **do**
4:     **if** $T \cup \{e_i\}$ 不成圈 **then**
5:         $T = T \cup \{e_i\}$
6: **return** T

补充说明

判断 $T \cup \{e_i\}$ 是否成圈可以使用并查集，即之前讲过的 UnionFind 数据结构。

定理 2.

Kruskal 算法能够正确的求出最小生成树。

证明. 令算法找到的生成树为 T，其边的加入顺序为 $\{e_1, e_2, \ldots e_{n-1}\}$。设 T^* 为 G 的最小生成树，我们来证明 $\omega(T) = \omega(T^*)$。

将 T^* 的边也按权重从小到大排列为 $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}\}$。我们对 k 归纳证明：

$$\omega(e_1) + \cdots \omega(e_k) = \omega(e'_1) + \cdots + \omega(e'_k), \text{即 } \forall k, \omega(e_k) = \omega(e'_k)$$

初始情况是 $k = 1$，由选法我们必然有$\omega(e_1) \leqslant \omega(e'_1)$。反设 $\omega(e_1) < \omega(e'_1)$。注意到 $T^* \cup \{e_1\}$ 一定包含一个圈，因此存在一个边 $e'_i \in T^*$，使得 $T^* \cup \{e_1\} - \{e'_i\}$ 依旧是一颗生成树，且 $\omega(e_1) < \omega(e'_i)$，这与 T^* 是最小生成树矛盾。

从而我们有$\omega(e_1) = \omega(e'_1)$.

Kruskal 算法正确性证明续. 假设 $\leqslant k-1$ 成立，考察 k 时的情况:

$e'_k \in \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$: 即 e'_k 已经被选中，从而必然存在 $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ 使得 e'_i 还未被选中，从而:

$$\omega(e'_k) \leqslant \omega(e_k) \leqslant \omega(e'_i) \leqslant \omega(e'_k)$$

从而 $\omega(e_k) = \omega(e'_k)$.

$e'_k \notin \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$: 即 e'_k 未被选中。则由选法有$\omega(e_k) \leqslant \omega(e'_k)$。反设 $\omega(e_k) < \omega(e'_k)$，则 $T^* \cup \{e_k\}$ 一定包含一个有 e_k 的圈 π:

- 若 π 包含边 $e'_t(t \geqslant k)$，则删去 e'_t 后会得到一颗权重更小的生成树，矛盾。
- 若 π 的边全由 $e'_1, \ldots, e'_{k-1}, e_k$ 组成且 e_k 是其中权重最大的边，则对于任意的 $i \in [k-1]$，$T^* \cup \{e_i\}$ 的圈都只包含$\{e'_1, \ldots, e'_{k-1}, e_i\}$, 从而 $e_1, \ldots, e_k$ 中一定会存在一个圈，矛盾。

因此命题对 k 也成立，即 $\omega(T) = \omega(T^*)$。 $\square$

Kruskal 算法的时间分析

- Kruskal 算法对边排序需要 $O(m\log m)$ 的时间。
- 判断是否有圈可以利用并查集，一共至多执行 $2m$ 次 Find 操作和 $n-1$ 次 Union 操作，因此总共耗费 $O(m\log *n)$ 的时间。
- 一共会往 T 里增加 $n-1$ 条边。

因此，算法的运行时间为 $O(m\log m)=O(m\log n)$.

定理 3.

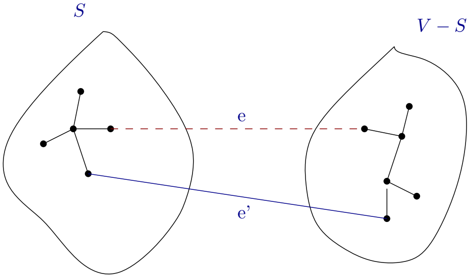
Kruskal 算法可以在 $O(m\log n)$ 内求出 G 的最小生成树。

我们换个角度再来理解下 Kruskal 算法的正确性。

假设为了构造最小生成树，我们已经选择了一些边，这些边将图上的顶点划分成了若干个部分，下面性质说明，跨越这些部分中的最短边也是某个最小生成树的一部分。

分割性质

设 $G = (V, E, \omega)$ 是一个含权重的连通无向图，X 是 G 的某个最小生成树的一部分，令 S 是 V 的一个子集，满足 X 中没有横跨 S 和 $V - S$ 的边，设 e 是 G 中连接 T 中的一个顶点和 $V - T$ 中的一个顶点的最短边，则 $X \cup \{e\}$ 是 G 的某个最小生成树的一部分。



最小生成树的另一算法-Prim 算法

算法：Prim

输入： 含权连通无向图 $G=(V,E)$，$V=\{1,2,\ldots,n\}$

输出： G 生成的最小生成树所组成的边集 T

$T=\emptyset,\ X=\{1\},\ Y=\{V\}-\{1\}$

for $y\leftarrow 2$ to n **do**

    if $(1,y)\in E$ **then**

        $n(y)=1$ ▷ $n(y)$ 记录当前最短边的另一端点

        $c(y)\leftarrow \omega(1,y)$ ▷ $c(y)$ 记录当前最短边的权重

    else $c(y)\leftarrow\infty$

for $j\leftarrow 1$ to $n-1$ **do**

    从 Y 中选取 $w(y)$ 最小的点 u

    $T=T\cup\{(u,n(u))\}$

    $X=X\cup\{u\},\ Y=Y-\{u\}$

    for $w\in Y\wedge(y,w)\in E$ **do**

        if $\omega(y,w)<c(w)$ **then**

            $n(w)\leftarrow y,\ c(w)\leftarrow\omega(y,w)$

return T

- 由分割性质，Prim 算法的正确性是显然的。
- Prim 算法与 Dijstra 算法的流程基本相同，所以其复杂性是一样的，取决于优先队列的实现。
    - 如果使用普通数组，时间为 $O(n^2)$.
    - 如果使用二叉堆，时间为 $O(m \log n)$.

定理 4.

使用二分堆作为优先队列的实现时，Prim 算法可以在 $O(m \log n)$ 内求出 G 的最小生成树。

问题 5.

假设现在有一个字符型文件，我们希望将其尽可能的压缩文件，但能很容易的重建文件。我们知道的信息有，文件中一共有 n 个字符，分别为 $\{c_1, \ldots, c_n\}$，每个字符出现的次数为 $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$。我们的目标是找到一种压缩方式 τ，令该压缩方式下，c_i 转换成的字符长度为 $\tau(c_i)$，使得最后文件的总长度最小，即最小化：$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \tau(c_i)$ 的值.

定长压缩

一个很自然的方法是定长编码压缩，比如假设一共有 $n = 2^k$ 个不同的编码，则我们可以使用 k 位的 01 串来编码每个字符。比如如果文章有 4 个不同的字符 $\{A, B, C, D\}$，则我们可以使用 $00, 01, 10, 11$ 去表示，

定长编码似乎非常有道理，但我们考虑下面这个情况，两个文件由 4 个字符 $\{A, B, C, D\}$ 组成，但其出现次数分别是:

- $f(A) = 25, f(B) = 25, f(C) = 25, f(D) = 25.$
- $f(A) = 1, f(B) = 1, f(C) = 1, f(D) = 97.$

两种情况此时都会用一个 200 位的 01 串表示。但对于第二种情况, 如果我们令:

$$A : 100,\ B : 101,\ C : 11,\ D : 0$$

用这种编码的话，第二个文件只需要 105 位的 01 串就可以表达了。

通过选择合适的变长编码可以减小文件表示的数目!

但变长的编码可能会出现二义性。假设某个文件中的 a, b, c 分别用如下编码:

$$a : 10,\ b, 100,\ : 0$$

那么对于字符串 100100100:

- 其想表达的是 bbb?
- 还是 acbb?
- ...

为了避免歧义，我们引入前缀码的概念，即任何字符的编码都不是其他字符编码的前缀。

定义 6.

如果一个编码满足前缀码的性质，即任何一个字符的编码不会是其他某个字符编码的前缀，则称其为前缀码。

前缀码举例

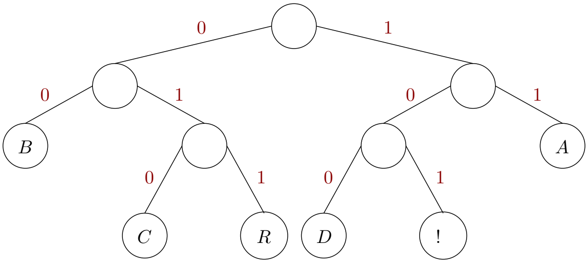
例 7.
考察下面堆字符的一个编码:

$$!:101,\ \ A:11, B:00,\ \ C:010,\ \ D:100,\ \ R:011$$

其是一个前缀码，对于任何一个由其编码的字符串，其意义是唯一的。

- 110001110101110011000111101 对应的字符串为 ABRACADABRA!.

前缀码可以由一棵二叉树来表示，比如上面的例子对应的二叉树为:



Huffman 编码

Shanghai Normal University

接下来我们介绍一种构造前缀码的方法，即 Huffman 编码。

David Huffman

Robert Fano

Claude Shannon

- 其直观的思想是，我们希望出现次数多的字符编码尽可能的短。
- 对于前缀码，所有字符都是对应在叶子节点上的，因此算法**优先选择出现次数少的字符**，将其合并成父节点。

算法： Huffman

输入: 一个 n 个字符的集合 $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ 和其字符对应出现的频度: $\{f(c_1), \dots, f(c_n)\}$

输出: C 的一个 Huffman 编码对应的树 (V, T)

```
根据频度将所有字符插入最小堆 H
V ← C, T = ∅
for i = 1 to n − 1 do
    c₁ ← DeleteMin(H)
    c₂ ← DeleteMin(H)
    f(v) ← f(c₁) + f(c₂)                ▷ v 是一个构造出来的 c₁, c₂ 的父节点
    Insert(H, v)
    V ← V ∪ {v}
    T ← T ∪ {(v, c₁), (v, c₂)}
return (V, T)
```

时间复杂性： $O(n \log n)$!

Huffman 编码的效果

	a	b	c	d	e	f
频度	45	13	12	16	9	5
定长编码	000	001	010	011	100	101
Huffman 编码	0	101	100	111	1101	1100

假设一共有 100000 个字符。

- 定长编码需要 300000 位。
- Huffman 编码需要 224000 位。

Huffman 编码是压缩率最高的无损编码。

引理 8.

令 C 是一个字母表。对其中每个字符 $c \in C$，$f(c)$ 为其频率。令 x, y 是其频率最低的两个字符，则存在一个 C 的最优前缀码，使得 x, y 的编码字符长度相同，且只差最后一个二进制不相同。

引理 9.

令 C 是一个字母表。对其中每个字符 $c \in C$，$f(c)$ 为其频率。令 x, y 是其频率最低的两个字符。令 C' 是字母表 C 去掉 x, y 加入一个新的字符 z 后得到的字母表。C' 也定义了其字符的频率 f'，$f'(c)$ 与 $f(c)$ 相同，除了定义 $f'(z) = f(x) + f(y)$。则对于 C' 的一个最优前缀码对应的编码树 T，将其中代表 z 的叶子节点替换成一个以 x, y 为孩子的内部节点得到新的树 T'，则 T' 是 C 的一个最优前缀码对应的编码树。

定理 10.

Huffman 算法可以正确的构造出最优前缀码。

对于贪心算法而言，

- 设计是容易的，因为**只要选择当前最优解**即可。
- 但证明其正确性往往并不容易，因为**局部最优并不一定是全局最优**。

关于贪心算法

贪心算法不总是一直能保证获取最优解，但是它总能给出一个算法，且其时间复杂性往往是很低的。

贪心算法设计

我们来看一个调度竞争共享资源的活动选择问题。

问题 11 **[活动选择问题].**

假设有 n 个活动的集合 $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$。这些活动使用同一个资源，而这个资源在某个时刻只能供一个活动使用。每个活动 a_i 都有一个开始时间 s_i 和结束时间 f_i，且满足 $0 \leqslant s_i < f_i < +\infty$。如果两个活动 a_i，a_j 的时间没有重叠，也就是说有 $s_i \geqslant f_j$ 或者 $s_j \geqslant f_i$，则称它们是兼容的。问题是：我们希望选出一个最大兼容活动集合。

补充说明

为了方便起见，我们假设 a_i 是按结束时间单调递增排序的，即 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n$。

例 12.

考察下面一个例子:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	12	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

- $\{a_3, a_9, a_{10}\}$ 是兼容的。
- $\{a_1, a_2, a_8, a_{11}\}$ 是不兼容的。
- 一个最大兼容活动集合为 $\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$，另一个为:$\{a_2, a_4, a_9, a_{10}\}$.

- 既然要求最大兼容活动集合，那我每次选取当前结束时间最早的活动就行。

算法 ActivitySelector(S, f)

输入： 活动集合 $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$，按结束时间单调递增排序，即 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n$

输出： S 的一个最大兼容活动子集 A

```
A = {a_1}
k = 1
for i = 2 to n do
    if s_i ≥ f_k then
        A = A ∪ {a_i}
        k = i
return A
```

时间复杂性：$O(n)$!

上海师范大学 Shanghai Normal University

引理 13.

令 S_k 表示在 a_k 结束后开始的任务集合。则我们有，若 a_{m_k} 是 S_k 中结束时间最早的活动，则 a_{m_k} 在 S_k 的某个最大兼容活动集中。

证明. 令 A_k 是 S_k 的某个最大兼容活动集，并且 a_{l_k} 是 A_k 中结束时间最早的任务。

- 如果 $a_{m_k} = a_{l_k}$，显然 $a_{m_k} \in A_k$，引理成立。
- 如果 $a_{m_k} \neq a_{l_k}$，则考虑 $A'_k = (A_k - \{a_{l_k}\}) \cup \{a_{m_k}\}$，我们有:

$$\forall a, b \in A'_k \Rightarrow f_a \leqslant s_b \vee f_b \leqslant s_a$$

从而 A'_k 也是 S_k 的某个最大兼容活动子集。

$\square$

定理 14.

算法 $ActivitySelector(S, f)$ 可以正确的求出最大兼容活动子集。

再来考虑零钱兑换问题。

零钱兑换问题

假设你现在手上有面值分别为 $a_1, \ldots, a_n (a_1 < a_2 < \cdots < a_n)$ 的硬币，现在你需要用这些硬币来凑出一个面值为 M 的钱，问你最少需要多少个硬币？

我们不妨假定 $a_1 = 1$，这能保证我们一定能够凑出面值为 M 的钱。

你的策略是什么？

我们考察如下的一个策略:

- 每次都选择面值最大的硬币 a_i。

这个策略是否一定能成功?

---

1. 面值为: $1, 2, 5$?
2. 面值为: $1, 2, 7, 10$?

我们能证明，当面值满足:$1, c, c^2, c^3, \ldots, c^{n-1}$ 的时候贪心策略是成功的。

证明. 令 $M = (m_1, \ldots, m_n)$ 是一个兑换策略，若 M 是一个最优解，则一定有:

$$\text{对任意的 } i \in \{1, \ldots, n-1\} \text{ 我们有} m_i < c \tag{1}$$

事实上不妨假设 $m_j \geqslant c, j \in \{1, \ldots, n-1\}$，注意到 $c \cdot c^j = c^{j+1}$，从而兑换策略 $M' = \{m_1, \ldots, m_j - c, m_{j+1} + 1, \ldots, m_n\}$ 会是一个更优的策略。

我们再证明，满足条件 1 的策略是唯一的。反设存在两个兑换策略 $M_1 = (m_{11}, \ldots, m_{1n})$ 和 $M_2 = (m_{21}, \ldots, m_{2n})$ 都满足条件 1 ，则我们有:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (m_{1i} - m_{2i}) c^i = c^n (m_{2n} - m_{1n}) \tag{2}$$

证明续. 若 $m_{2n} - m_{1n} \neq 0$，不妨令其 $\geqslant 1$，则我们有：

$$\sum_{i=1}^{n-1}(m_{1i} - m_{2i})c^i \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}(c-1)\cdot c^i = (c-1)\cdot\frac{c^n-1}{c-1} = c^n - 1 < c^n \tag{3}$$

与 2 矛盾，从而 $m_{2n} - m_{1n} = 0$。

以相同的方式从大到小逐一考虑 $m_{1i} - m_{2i}$ 的值，我们可以最终得到，等式 2 成立当且仅当 $M_1 = M_2$，从而满足条件 1 的策略是唯一的。

最后注意到由于贪心策略给出的策略满足条件 1 ，从而贪心策略给出了该情况下的最优解。 $\square$

零钱兑换问题的回顾

我们通过零钱兑换问题展示了贪心算法的特点。

贪心算法

- 贪心策略并不总能成功。
- 贪心策略可能在一些特殊情况下是可以成功的。

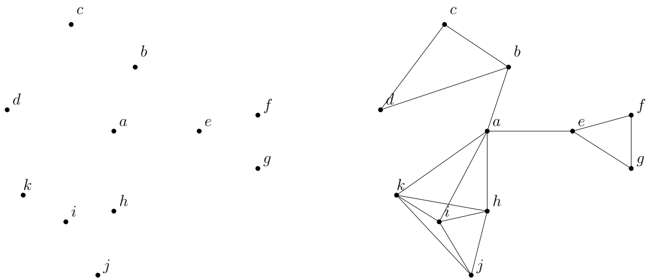
关于更多

要想解决所有情况下的零钱兑换问题，我们需要动态规划的思想。

集合覆盖问题 (I)

考虑如下的问题：下图中的点代表一组城镇。我们需要决定在哪些城镇建立学校，需要满足两个要求：

1. 学校必须建设在城镇上。
2. 从任意一个城镇出发，到最近的学校的距离不超过 30 公里。为了方便表示，我们将可达的城镇用边连接起来。



问题是，**至少要建立多少个学校?**

我们可以利用集合的语言来描述这个问题。

令集合 U 表示所有的城镇，令 S_a 表示学校建在城市 a 的话能在 30 公里能到达的城镇。

- $U = \{a, b, c, \cdots, h, i, j\}$.
- $S_a = \{b, c, k, i, h\}$，即所有 a 在图中的邻边访问的点。

问题就转化成了，至少挑几个集合 S_x，使得所有的城镇都被覆盖。这就是**集合覆盖问题**。

问题 15 **[集合覆盖问题].**

给定一个集合 U 和一些子集 $S_1, \ldots, S_n$，求一个最小的子集 T，使得 $\cup_{t \in T} S_t = U$.

集合覆盖问题的贪心策略

- 选取包含未被覆盖元素的最大集合 S_i。

这是正确的算法么?

很遗憾，并不是。

- 在上述例子中，我们的贪心策略会选择 $\{a, d, g, j\}$.
- 但实际上，$\{b, e, i\}$ 是最优的选择。

幸运的是，贪心算法的解并不是一无是处。

定理 16.

令 U 有 n 个元素，最优解包含 k 个集合，贪心算法的解包含 l 个集合，则 $l \leqslant k \ln n$.

换句话说，贪心算法的解始终不会超过最优解的 $\ln n$ 倍。

证明. 令 n_t 表示贪心算法经过 t 轮后未被覆盖的元素个数，$n_0 = n$，则我们有：

$$n_{t+1} \leqslant n_t - \frac{n_t}{k} \leqslant n_t(1 - \frac{1}{k}) \leqslant n_0(1 - \frac{1}{k})^t \leqslant n_0 e^{-t/k}$$

从而 $t = k \ln n$ 时 $n_t < 1$，即不会存在未被覆盖的元素。 □

这里最后利用了如下的不等式：

$$1 - x \leqslant e^{-x}$$

关于贪心算法的进一步思考

我们已经可以看到，贪心算法并不总能保证最优解。

- 事实上很多情况下，贪心算法能保证得到的解和最优解只有一个特定的比例。
- 这比值可能是一个常数，也可能是一个和问题规模有关的函数，比如在上述的集合覆盖问题中，这个比值和 $\ln n$ 有关。
- 事实上，尽管看起来还有很大改进空间，但是在该问题中，已经不存在一个多项式时间的算法能够做到更好的比值了。
- 这也是近似算法的一个初衷，我们会在后续进一步讨论。

总结

本节内容

- 贪心算法
  - 什么是贪心算法
  - 贪心算法的特点
- 贪心算法设计举例
  - 最小生成树-Kruskal 算法和 Prim 算法。
  - 文件压缩-Huffman 编码。
  - 活动选择问题。
  - 零钱兑换问题。
  - 集合覆盖问题。