第十二周作业-solution

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2023 年 12 月 30 日

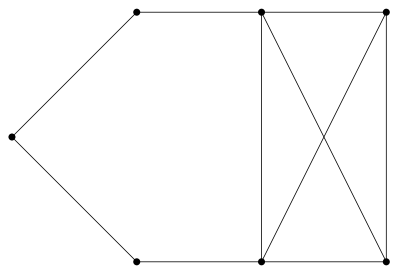
截止日期 2023 年 12 月 4 日晚 23：59

1. 令无向图 G 有 10 条边，3 度的顶点与 4 度的顶点各 2 个，其余顶点的度数均小于 3, 问 G 至少有多少个顶点？并在最小顶点的情况下画出 G 的示意图、度数列以及 $\Delta(G), \delta(G)$.

   解答. 设 G 有 x 个顶点，则有握手定理有：

   $$20 = 2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \leq 3 \times 2 + 4 \times 2 + 2 \times (x-4) = 2x + 6$$

   得出 $x \geq 7$, 从而 G 至少有 7 个顶点。当 $x = 7$ 时，G 的示意图如下：



   - 度数列：$(4, 4, 3, 3, 2, 2, 2)$
   - $\Delta(G) = 4, \delta(G) = 2$

   □

2. 下列各数列中哪些是可简单图化的？对于可简单图化的数列给出两个非同构的简单图：

   (1) $(2, 3, 3, 5, 5, 6, 6)$
   (2) $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5)$
   (3) $(2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$

   解答. (1) 该度数列不可被简单图化，反设其存在一个简单图，注意到一共有 7 个顶点，因此两个度数为 6 的点一定与其余每个点都有边。删去这两个点后，图的度数列为：

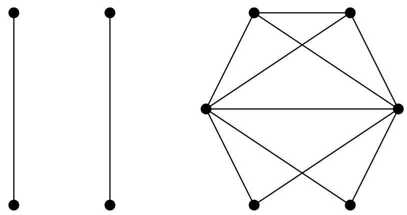
   $$(0, 1, 1, 3, 3)$$

   这说明 $(1, 1, 3, 3)$ 一定是某个简单图的度数列，但是这个度数列不可被简单图化（每个点都至少有 2 的度数），因此矛盾。

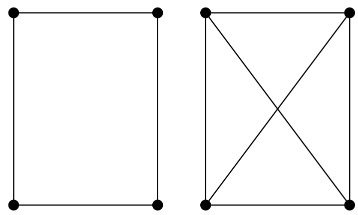
   (2) (2) 和 (3) 皆可以被图化，如下图所示：

   □

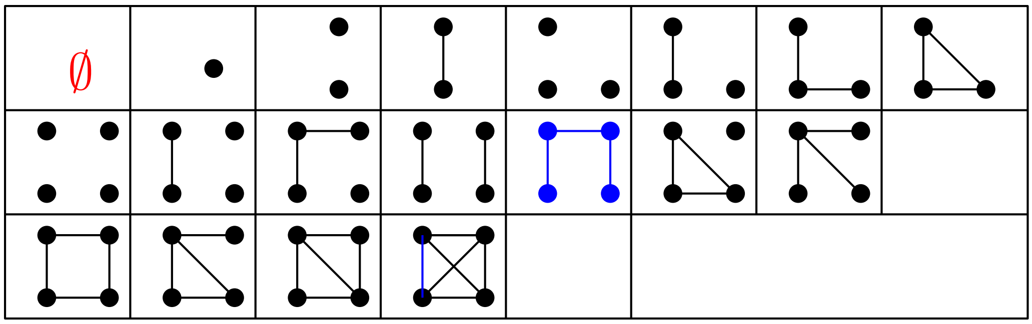
3. 画出完全图 K_4 的所有非同构的子图，并且指出哪些图是生成子图，哪些是自补图。



(2)



(3)



解答. K_4 的所有非同构子图如下：其中：

- 一共 19 个非同构的子图，其中第二和第三行是生成子图，共 11 个。
- 第 2 行标蓝的为自补图.

□

Remark 0.1

请注意生成子图和子图的概念，子图不要遗漏了最平凡的连个，空图和 K_4 本身。

4. 设 G 是 n 阶 $n+1$ 条边的无向图，证明：G 中存在顶点 v 使得 $d(v) \geq 3$.

解答. 反设 G 的任何一个顶点度数均 ≤ 2，则由握手定理：

$$2(n+1) = 2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \leq 2 \times n$$

矛盾。 □

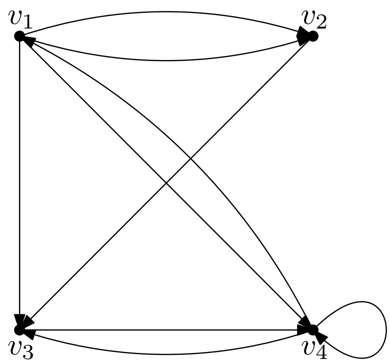
5. 设有向图 D 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，其邻接矩阵 A 为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

画出 D 的示意图，并求出 D 各个顶点的出度与入度。

解答. D 的示意图如下：其中：

- v_1 的出度为 3，入度为 1.



- v_2 的出度为 1，入度为 2.
- v_3 的出度为 1，入度为 3.
- v_4 的出度为 3，入度为 2.

□