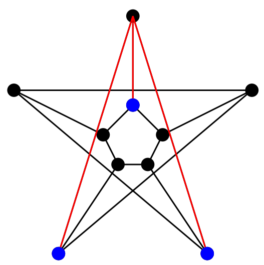
离散数学	Lecture 11

第十三周作业-solution

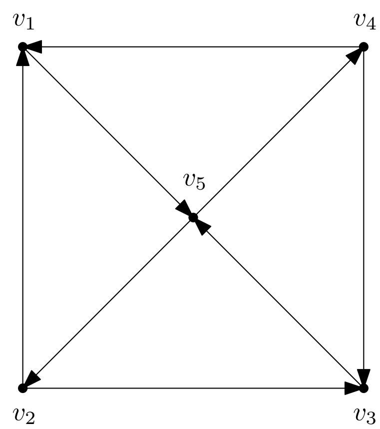
Lecturer: 杨启哲 | Last modified: 2023 年 12 月 31 日

1. 试求 $Peterson$ 图 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$.



解答. $Peterson$ 图 G 的点连通度 $\kappa(G)=3$，边连通度 $\lambda(G)=3$(删去图中蓝色顶点或者红色边会使其有两个连通分支，另一方面可以验证任删两条边或者两个顶点图还是连通的，这是因为删去任何一个点图都是哈密顿图。). □

2. 有向图 G 如下图所示，求：



(1) v_2 到 v_5 一共有多少条长度最多为 3 的通路?

(2) v_2 一共有多少条长度恰为 $1,2,3,4$ 的回路?

(3) 图中长度小于等于 4 的通路数和回路数。

(4) 写出 G 的可达矩阵。

解答. G 的邻接矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

计算可得:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2\\2&0&2&0&0\end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{bmatrix},\ A^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\\0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\\0&4&0&4&0\end{bmatrix}$$

因此我们有:

(1) v_2 到 v_5 长度最多为 3 的通路数 $=A[2][5]+A^2[2][5]+A^3[2][5]=2$

(2) v_2 长度恰为 $1,2,3,4$ 的回路恰好为 $A[2][2],A^2[2][2],A^3[2][2],A^4[2][2]$，即 $0,0,2,0$

(3) ≤ 4 的通路数 $=\sum_{k=1}^{4}\sum_{i,j\le 5}(A^k[i][j])=72.$

≤ 4 的回路数 $=\sum_{k=1}^{4}\sum_{i\le 5}(A^k[i][i])=12.$

(4) G 的可达矩阵为全 1 矩阵，即:

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

□

3. 设 G 是 6 阶简单无向图，证明：G 或其补图 $\overline{G}$ 中存在 3 个点彼此相邻。

解答. G 种任取一点 v，则由抽屉原理在 G 或其补图 $\overline{G}$ 一定存在一张图使得有 3 个点与其相邻，不妨设为 G。令与其相邻的点为 v_1,v_2,v_3。则我们有:

- 若 v_1,v_2,v_3 在 G 中不存在边，则 v_1,v_2,v_3 在 $\overline{G}$ 中彼此相邻。
- 若 v_1,v_2,v_3 在 G 中至少存在一条边，不妨记为 (v_1,v_2)，则 v,v_1,v_2 在 G 中彼此相邻。

□

4. 设 G 是 n 阶简单无向图，边数 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，证明 G 是哈密顿图，再举例说明当 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 时，G 不一定是哈密顿图。

解答. 我们证明如下事实:

- 对于 G 中的任何两点 u,v 我们都有 $d(u)+d(v)\ge n$

显然哈密顿图可以由此结论直接得到 (充分条件)。反设存在两个点 u,v 使得 $d(u)+d(v)<n$，则考察剩余 $n-2$ 个点，其至多贡献了 $(n-2)(n-3)+n-1$ 的度数 (这 $n-2$ 个点之间互相连边的度数以及联结 u,v 至多 $n-1$ 的度数)，因此我们有:

- 总的度数和 $\le (n-2)(n-3)+2(d(u)+d(v))<n^2-5n+6+2n=n^2-3n+6$

另一方面由握手定理，总的度数和 $=2m$，因此我们有:

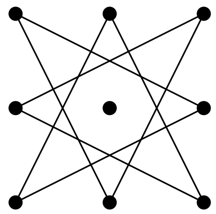
$$\text{度数和}=2m=(n-1)(n-2)+4=n^2-3n+6$$

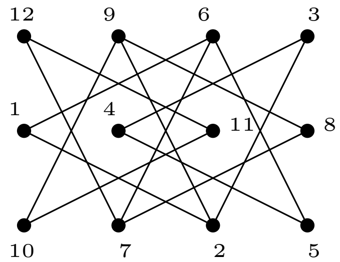
矛盾。边数 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 时，考虑如下的例子：其中 $n-1$ 个点构成完全图 K_{n-1}，剩余的这个点仅与这个 $n-1$ 个点中的一个点有一条边。显然该图不存在哈密顿回路，并且满足：$m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$。 □

5. 国际象棋中的马走日字，即在 (x, y) 位置的马可以走到 $(x \pm 1, y \pm 2)$ 或 $(x \pm 2, y \pm 1)$ 位置（如果这个位置是棋盘上的位置）。马的一个周游指的是可以从棋盘上某个格子开始，走遍所有的格子并且每个格子只走一次：

   - 证明：3×4 的棋盘上存在一个马的周游。
   - 证明：3×3 的棋盘上不存在马的周游。

解答. 将棋盘转换为图可得：





- 3×4 的棋盘上存在一个马的周游，顺序如右图所示。
- 3×3 的棋盘上不存在马的周游，因为存在一个孤立点。

$\square$