离散数学 Lecture 12

第十四周作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2023 年 12 月 31 日

1. 一颗无向树 T 有 5 片树叶，3 个度数为 2 的内部节点，其余内部节点度数都为 3，问 T 有几个顶点？

   解答. 注意到树叶的度数为 1，设共有 x 个度数为 3 的内部节点，则由握手定理知：

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot x + 5 \cdot 1 = 2 \cdot (x + 7) \implies x = 3$$

   故 T 有 $4 + 3 + 3 = 10$ 个顶点。 □

2. 已知 n 个顶点 m 条边的无向图 G 是 k 棵树组成的森林，证明 $m = n - k$。

   解答. 设 k 棵树分别有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 个顶点和 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 条边，则由树的性质可知：

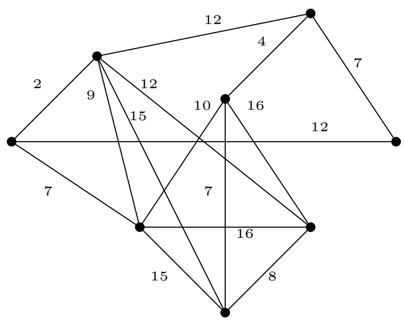
$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n, \quad \sum_{i=1}^{k} m_i = m, \quad m_i = n_i - 1$$

   故 $m = n - k$。 □

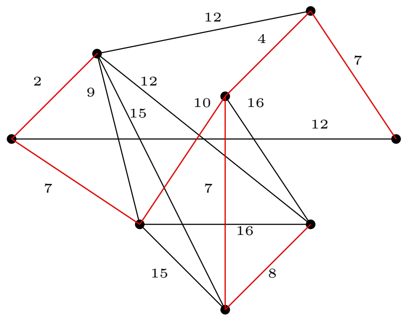
3. 证明，任何无向树都是二分图。

   解答. 注意到无向树中没有圈，从而其没有奇数圈，故无向树是二分图。 □

4. 求下图的最小生成树：



   解答. 其最小生成树如下所示，注意到只要不断选取当前使其不成圈的最小权重边即可（选取顺序不一定唯一，如例子中权重为 7 的 3 条边顺序是任意的）。



$\square$

5. 令 G 是 n 阶简单无向图 ($n \geq 5$)，证明：G 或其补图 $\overline{G}$ 中必有圈。

解答. 我们利用如下事实证明:

- 具有 $\geq n$ 条边的 n 阶无向图一定存在一个圈。

由抽屉原理，G 或 $\overline{G}$ 一定存在一个边数 $\geq \frac{n(n-1)}{4}$ 的图，反设其都不存在圈的话，我们有：

$$\frac{n(n-1)}{4} \leq n-1 \implies n \leq 4$$

与 $n \geq 5$ 矛盾。 $\square$

Remark 0.1 (关于具有 $\geq n$ 条边的 n 阶无向图一定存在一个圈的证明)

该性质可以用归纳法证明。

解答. 我们对 n 进行归纳,$n=1$ 时由于只有自环，命题成立。

假设命题对 $\leq n-1$ 个点的图 G 均成立，考察 $|V|=n$ 的情况。我们可以不妨假设 G 是连通的，否则存在一个连通分支 (V',E') 满足 $|V'|<n, |E'|>|V'|$，从而由归纳假设其存在一个圈。现在考虑 G 中的一条边 (u,v):

- (u,v) 不是割边，即去除 (u,v) 后还存在一条 u 到 v 的路径 π，则 $(u,v)\pi$ 是一个圈。
- (u,v) 是割边，则删去 (u,v) 后图 G 被分解成两个连通分支，注意到其一定存在一个连通分支 (V',E') 满足 $|V'|<n, |E'|>|V'|$，从而由归纳假设其存在一个圈。

从而命题对 n 也成立。 $\square$