第十五周作业-solution

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2023 年 12 月 31 日

1. 下面给出的各符号串集合哪些是前缀码?
   - $A_1 = \{0, 10, 110, 1111\}$
   - $A_2 = \{1, 01, 001, 000\}$
   - $A_3 = \{1, 11, 101, 001, 0011\}$
   - $A_4 = \{b, c, dd, cd, aba, abb, abc\}$

   解答.
   - A_1, A_2 是前缀码。
   - A_3 不是前缀码，1 是 11 的前缀。
   - A_4 不是前缀码，c 是 cd 的前缀。

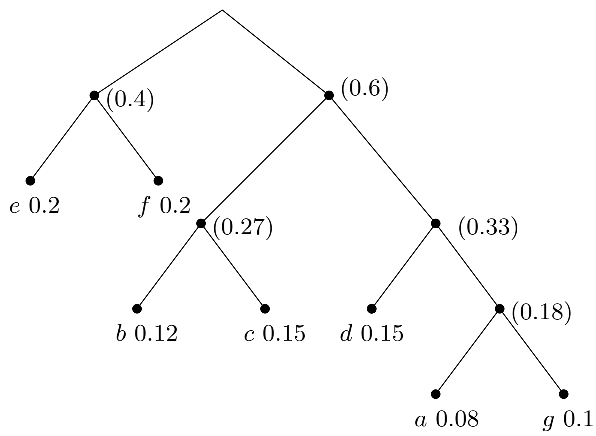
   □

2. 设 7 个字母在一篇文章中出现的频率如下：

字母	a	b	c	d	e	f	g
频率	0.08	0.12	0.15	0.15	0.2	0.2	0.1

   用 $Huffman$ 算法构造出相应的最优前缀码，并计算当整篇文章有 1×10^6 个字符的时候，用这个最优前缀码编码文章所需的长度。

   解答. 相应的 $Huffman$ 树如下所示：



   可以得到相应的编码为：

$$a : 1110,\ b : 100,\ c : 101,\ d : 110,\ e : 00,\ f : 01,\ g : 1111$$

   每个字符的平均编码为：

$$4 \times 0.08 + 3 \times 0.12 + 3 \times 0.15 + 3 \times 0.15 + 2 \times 0.2 + 2 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 2.78$$

   从而当整篇文章有 1×10^6 个字符的时候，用这个最优前缀码编码文章所需的长度为 2.78×10^6.

   □

Remark 0.1

本题的 $Huffman$ 树不唯一，但是最优编码的平均长度是唯一的。题目中我按每次组成一个新节点的时候将权重小的放在左子树上进行 $Huffman$ 树的构建。

3. 考虑堆的大小是 $10, 20, 30, 40, 50$ 的 5 堆 Nim 游戏。这局游戏是平衡的么？请给出玩家 I 的第一次取子方案。

解答. 每堆石子的二进制表示如下：

	10	20	30	40	50
1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1
4	0	1	1	0	0
8	1	0	1	1	0
16	0	1	1	0	1
32	0	0	0	1	1

- 此游戏是不平衡的。
- 玩家 I 可以通过 20 里取 6，30 里取 26，50 里取 10 来变成平衡 Nim 游戏从而保证必胜。

□

Remark 0.2

变成平衡 Nim 游戏的方案并不唯一，课上只是提出了一种任意情况下按其操作都可以变成平衡 Nim 游戏的策略。

4. 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ 有多少满足 $x_1 \geq 2$，$x_3 \geq -5$，$x_2, x_4 \geq 0$ 的整数解？

解答. 令 $y_1 = x_1 - 1$，$y_3 = x_3 + 6$，$y_2 = x_2 + 1, y_4 = x_4 + 1$，则原方程化为：

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 37$$

注意到满足 $x_1 \geq 2$，$x_3 \geq -5$，$x_2, x_4 \geq 0$ 的整数解恰好是满足上述关于 y_1, y_2, y_3, y_4 方程的正整数解，因此原问题等价于求后者正整数解的个数，即：$\binom{36}{3}$. □

Remark 0.3

要区分正整数解和非负整数解的区别。

5. 令 $r \leq n$ 是两个正整数，证明下列组合式：

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

解答. 只要利用如下的组合恒等式即可：

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

我们有：

$$\begin{aligned}\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\cdots+\binom{n}{r} &= \binom{r+1}{r+1}+\binom{r+1}{r}+\cdots+\binom{n}{r}\\ &= \binom{r+2}{r+1}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}\\ &= \cdots\\ &= \binom{n}{r+1}+\binom{n}{r}\\ &= \binom{n+1}{r+1}\end{aligned}$$

□

6. 证明对所有整数 r,k,m 我们有：

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

解答. 由定义立得：

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\frac{r!}{m!(r-m)!}\frac{m!}{k!(m-k)!}=\frac{r!}{k!(r-k)!}\frac{(r-k)!}{(m-k)!(r-m)!}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

□

Remark 0.4

也可以利用组合的方式证明，假设我们要从 r 个人中选出 m 个人，然后再从这 m 个人中选出 k 个人，这样的选法有 $\binom{r}{m}\binom{m}{k}$ 种。另一方面，我们也可以先从 r 个人中选出 k 个人，然后再从剩下的 $r-k$ 个人中选出 $m-k$ 个人，这样的选法有 $\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$ 种。由于这两种选法都是从 r 个人中选出 m 个人，再从这 m 个人中选出 k 个人，因此这两种选法的结果应该是相同的，即：

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$