

第一周作业-solution

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2023 年 11 月 28 日

1. 请判断下列语句哪些是命题？在是命题的句子中，哪些是简单命题？真命题？哪些命题的真值还不知道？

- (1) 中国有四大发明。
- (2) 3 是素数或 4 是素数。
- (3) $2x + 3 < 5$ ，其中 x 是任意实数。
- (4) 对于任意实数 x ， $2x + 3 < 5$ 。
- (5) 你去图书馆么？
- (6) 2025 年元旦下大雪。
- (7) 这朵玫瑰花多美丽呀！

解答. 这里大家容易误解的是 (3) 和 (4)。事实上，这里 (4) 是有真值的，因为存在一个实数不满足 $2x + 3 < 5$ ，即 $x \geq 1$ ，因此该句子为假命题。这实际上是一阶逻辑里的一个命题，其包含了全称量词。所以评判其是不是简单命题似乎不是很合适，但是在命题逻辑的框架中，这个命题已经不会被进一步拆解了，所以它还是当成简单命题。不过一般来说，简单命题不会以这样的陈述为例子。

- 命题：(1), (2), (4), (6).
- 简单命题：(1), (4), (6).
- 真命题：(1), (2).
- 未知真值：(6).

□

2. 将下列命题符号化，并指出各个命题的真值。

- (1) 2 是素数。
- (2) 不但 π 是无理数，而且自然对数的底 e 也是无理数。
- (3) 3 是偶素数。
- (4) 3 不是偶数或 4 不是偶数。
- (5) 小丽只能从筐里拿一个苹果或者一个梨。
- (6) 只要 $2 < 1$ ，就有 $3 < 2$ 。
- (7) 除非 $2 < 1$ ，否则 $3 < 2$ 。
- (8) 只有李老师上课，小明才来听课。

解答. 我们可以将其符号化如下：

1. 令 p : 2 是素数。则该命题表示为 $p(\text{真})$ 。
2. 令 p : π 是无理数， q : e 是无理数。则该命题表示为 $p \wedge q(\text{真})$ 。

3. 令 $p: 3$ 是偶数, $q: 3$ 是素数. 则该命题表示为 $p \wedge q$ (假).
4. 令 $p: 3$ 是偶数, $q: 4$ 是偶数. 则该命题表示为 $\neg p \vee \neg q$ (真).
5. 令 p : 小丽从筐里拿一个苹果, q : 小丽从筐里拿一个梨. 则该命题表示为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ (未知).
6. 令 $p: 2 < 1$, $q: 3 < 2$. 则该命题表示为 $p \rightarrow q$ (真).
7. 令 $p: 2 < 1$, $q: 3 < 2$. 则该命题表示为 $\neg p \rightarrow q$ 或者 $\neg q \rightarrow p$ (真).
8. 令 p : 李老师上课, q : 小明来听课. 则该命题表示为 $q \rightarrow p$ (未知).

Remark 0.1

1. 第 5 题需要注意的是, 这里的“只能”是指“只能从筐里拿一个”, 因此需要排除两个都拿的情况, 即两个都拿时真值需要为假.
2. 最后三道题其实都可以从充分和必要条件上来理解, 以最后一句为例. 只有李老师上课, 小明才来听课. 说明小明来听课的必要条件是李老师上课, 从而为 $q \rightarrow p$. 另一方面从真值来看, 如果转换为 $p \rightarrow q$, 则蕴含了李老师来上课小明就一定来听课的意思, 这是与原句不符的.

□

3. 令 $p: 2 + 3 = 5$, q : 大熊猫产在中国, r : 太阳从西方升起, 求下列复合命题的真值.

(1) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$.

(2) $\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r)$.

(3) $(\neg r \wedge q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$.

解答. $p = 1, q = 1, r = 0$. 从而计算可得:

- $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ 为假.
- $\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r)$ 为假.
- $(\neg r \wedge q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$ 为假.

□

4. 用真值表判断下列公式的类型, 并指出它们的成真赋值和成假赋值.

(1) $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$.

(2) $(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

(3) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$.

解答. 这里只列出真值表最后一项:

1. $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$ 为重言式, 所有都是成真赋值.

p	q	r	$p \rightarrow (p \vee q \vee r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2. $(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ 为可满足式, 成真赋值为 010, 011, 100, 110, 成假赋值为 000, 001, 101, 111。

p	q	r	$(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

3. $(p \rightarrow q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$ 为可满足式, 成真赋值为 000, 001, 010, 011, 110, 111, 成假赋值为 100, 101。

p	q	r	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

□

5. 设 A, B 都是含命题变项 p_1, \dots, p_n 的公式, 证明 $A \wedge B$ 是重言式当且仅当 A 和 B 都是重言式。将重言式换成矛盾式, 上述结论还正确么?

解答. 这其实是个非常简单的证明, 只需要使用定义即可。

- 若 $A \wedge B$ 是重言式, 则对于任何一个关于 p_1, \dots, p_n 的赋值, $A \wedge B$ 都为真。因此 A 和 B 也都为真, 即对于任何一个关于 p_1, \dots, p_n 的赋值, A 和 B 都为真, 因此 A 和 B 都是重言式。
- 若 A 和 B 是重言式, 则对于任何一个关于 p_1, \dots, p_n 的赋值, A 和 B 都为真。因此 $A \wedge B$ 也为真, 即对于任何一个关于 p_1, \dots, p_n 的赋值, $A \wedge B$ 都为真, 因此 $A \wedge B$ 是重言式。

若把条件换成矛盾式, 则结论不正确。事实上考虑任何一个命题 $P, P \wedge \neg P$ 是个矛盾式, 但显然 P 不一定是矛盾式。 □