

第二周作业-solution

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2023 年 12 月 20 日

1. 用等值演算法证明下列等值式。

$$(1) p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q).$$

$$(2) \neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q).$$

解答.

1.

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) &\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \\ &\Leftrightarrow p \wedge \top \\ &\Leftrightarrow p \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \\ &\Leftrightarrow \perp \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee \perp \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \\ &\Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg\neg(q \wedge \neg p) \\ &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \\ &\Leftrightarrow \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \\ &\Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q) \end{aligned}$$

□

2. 求下列公式的合取范式和析取范式。

$$(1) \neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p.$$

$$(2) (p \rightarrow (p \vee q)) \vee r.$$

解答.

1. 计算可得:

- 合取范式: $\neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p = q \wedge p \wedge \neg p$
- 析取范式: $\neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p = q \wedge p \wedge \neg p$

2. 计算可得:

- 合取范式: $q \vee r$
- 析取范式: $q \vee r$

□

3. 已知公式 A 含 3 个变量 p, q, r , 其成真赋值为 000, 011, 110, 求 A 的主析取范式和主合取范式。

解答. • A 的主合取范式为:

$$M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_7 = (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \\ \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

• A 的主析取范式为:

$$m_0 \vee m_3 \vee m_6 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

□

4. 用消解法判断下列公式是否是可满足的。

- (1) $p \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge q$.
- (2) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r) \wedge r$.

解答.

- $p \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge q$ 不可满足, 因为
 - $p, \neg p \vee \neg q$ 消解成 $\neg q$;
 - $\neg q, q$ 消解成 ϵ .
- $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r) \wedge r$ 不可满足, 因为
 - $r, p \vee \neg r$ 消解成 p ;
 - $p, \neg p \vee q$ 消解成 q ;
 - $q, \neg q \vee \neg r$ 消解成 $\neg r$;
 - $\neg r, r$ 消解成 ϵ .

□

5. 某公司计划从新入职的五名员工赵一、钱二、孙三、李四、王五中选派一些人参加交流, 选派需要满足以下条件:

- 如果赵一参加, 那么钱二也参加;
- 李四和王五两个人必有一个人要参加。
- 钱二和孙三两个人必须有一个并且也只能有一个参加。
- 孙三和李四两个人要么都参加, 要么都不参加。
- 如果王五参加的话, 赵一和钱二也需要参加。

请分析公司该如何选择出去交流的人员。如果有兴趣的话, 可以尝试使用一下等值演算法。

解答. 我们提供两种方法。

方法一 推理。

- 王五参加，可得赵一和钱二也参加，因此李四和孙三都不参加，因此只能选赵一、钱二、王五三人参加。
- 王五不参加，可得李四和孙三都参加，因此赵一和钱二都不参加，因此只能选李四、孙三四人参加。

因此一共两种方案。

方法二 等值演算法。令 p, q, r, s, t 分别表示赵一、钱二、孙三、李四、王五参加交流，可得满足上述条件的表达式为：

$$(p \rightarrow q) \wedge (s \vee t) \wedge (q \oplus r) \wedge (r \leftrightarrow s) \wedge (t \rightarrow (p \wedge q))$$

注意到 $(q \oplus r) \wedge (p \rightarrow q)$ 等价于：

$$\varphi_1 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

从而 $\varphi_1 \wedge (s \vee t)$ 等价于：

$$\varphi_2 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge t) \vee (q \wedge \neg r \wedge t) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge t)$$

进一步演算 $\varphi_2 \wedge (r \leftrightarrow s)$ 可得：

$$\varphi_3 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge t) \vee (q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge t) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge t)$$

由 $t \rightarrow (p \wedge q) = (\neg t \vee p) \wedge (\neg t \vee q)$ ，先计算 $\varphi_3 \wedge (\neg t \vee p)$ 可得：

$$\varphi_4 = (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg t) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge t)$$

最后注意到 $\varphi_4 \wedge (\neg t \vee q) = \varphi_4$ ，我们计算出其主析取范式，从而一共有两种方案：

- 赵一、钱二、王五参加
- 李四、孙三参加

□

Remark 0.1

第 5 题的等值演算由于变量较多，计算过程较为繁琐，并未采用等值演算法的标准格式，而是通过演算思路进行书写，这样虽然不够严谨，但应该方便大家理解。