第三周作业-solution

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2023 年 11 月 28 日

1. 将下列公式化成与之等值且仅含有 ¬, ∨ 中联结词的公式：

   - $(\neg p \vee \neg q) \wedge r$
   - $(p \to (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r$
   - $p \wedge q \wedge \neg r$

   解答.

   - $(\neg p \vee \neg q) \wedge r = \neg\neg((\neg p \vee \neg q) \wedge r) = \neg((\neg(\neg p \vee \neg q)) \vee \neg r)$.
   - $(p \to (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r = \neg\neg((p \to (\neg\neg(q \wedge \neg p))) \wedge q \wedge r) = \neg((\neg p \vee (\neg(\neg q \vee p))) \vee \neg q \vee \neg r)$.
   - $p \wedge q \wedge \neg r = \neg\neg(p \wedge q \wedge r) = \neg(\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

   □

2. 设 A, B, C 为任意的命题公式：

   - 请举例说明若 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$，则不一定有 $A \Leftrightarrow B$.
   - 请举例说明若 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$，则不一定有 $A \Leftrightarrow B$.

   即 ∨, ∧ 都不满足消去律。

   解答.

   - 取 $A = p$, $B = q$, $C = r \vee \neg r$，则 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$ 恒成立，但 $A \Leftrightarrow B$ 不成立。
   - 取 $A = p$, $B = q$, $C = r \wedge \neg r$，则 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$ 恒成立，但 $A \Leftrightarrow B$ 不成立。

   □

3. 对于下面每个前提给出两个结论，要求一个是正确的，另一个不是正确的。

   - 前提：$p \to q$, $q \to r$
   - 前提: $(p \wedge q) \to r$, $\neg r, q$

   解答.

   - 正确结论：$p \to r$
     错误结论：$r \to p$
   - 正确结论：$\neg p$
     错误结论：$\neg q$

   □

4. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明：

- 前提：$p \to (q \to r)$, p, q; 结论:$r \vee s$
- $\{p \to q,\ \neg(q \wedge r),\ r\} \longrightarrow \neg p$

解答. (1) 证明过程如下：

(i)	$p \to (q \to r)$	前提
(ii)	p	前提
(iii)	$q \to r$	1,2,MP
(iv)	q	前提
(v)	r	3,4,MP
(vi)	$r \vee s$	5,ADD

(2) 证明过程如下：

(i)	$p \to q$	前提
(ii)	$\neg(q \wedge r)$	前提
(iii)	r	前提
(iv)	$\neg q \vee \neg r$	2,DeMorgan
(v)	$\neg q$	3,4, 析取三段论
(vi)	$\neg p$	1,5, 拒取

□

5. 用自然推理系统 P 构造下面推理的证明：

只要 A 曾到过受害者房间并且 11 点以前没离开，A 就是谋杀嫌犯。A 曾到过受害者房间。如果 A 在 11 点前离开，看门人就会看见他。看门人没有看见他，所以 A 是谋杀嫌犯。

解答. 令 $p: A$ 曾到过受害者房间，$q: A$ 在 11 点前离开，$r: A$ 是谋杀嫌犯，s : 看门人看见 A.

(1)	$(p \wedge \neg q) \to r$	前提
(2)	p	前提
(3)	$(p \wedge q) \to s$	前提
(4)	$\neg s$	前提
(5)	$\neg(p \wedge q)$	2,3, 拒取
(6)	$\neg p \vee \neg q$	5,DeMorgan
(7)	$\neg q$	2,6, 析取三段论
(8)	$p \wedge \neg q$	2，7, 合取
(9)	r	1,8,MP

□