离散数学 Lecture 4

第五周作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2023 年 11 月 28 日

1. 将下列命题用 0 元谓词符号化。
   - 小王学过英语和法语。
   - 除非李健是东北人，否则他一定怕冷。
   - 3 不是偶数。

   解答.
   - 令 $E(x)$ 表示 x 学过英语，$F(x)$ 表示 x 学过法语，则小王学过英语和法语可以表示为 $E(\text{小王}) \wedge F(\text{小王})$。
   - 令 $D(x)$ 表示 x 是东北人，$C(x)$ 表示 x 怕冷，则除非李健是东北人，否则他一定怕冷可以表示为 $\neg D(\text{李健}) \rightarrow C(\text{李健})$。
   - 令 $O(x)$ 表示 x 是偶数，则 3 不是偶数可以表示为 $\neg O(3)$。

   □

2. 在一阶逻辑中，分别在 (a)，(b) 时将下列命题符号化，并讨论个命题的真值。
   - 对任意的 x，均有 $x^2 - 2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$。
   - 存在 x，使得 $x + 9 = 5$.

   (a) 个体域为自然数集合 $\mathbb{N}$。
   (b) 个体域为实数集合 $\mathbb{R}$。

   解答.
   - 令 $P(x)$ 表示 $x^2 - 2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$，则该命题可以表示为 $\forall x P(x)$，在个体域 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{R}$ 中该命题均为真。
   - 令 $Q(x)$ 表示 $x + 9 = 5$，则该命题可以表示为 $\exists x Q(x)$，在个体域 $\mathbb{N}$ 为假，在个体域 $\mathbb{R}$ 中为真。

   □

3. 在一阶逻辑中将下列命题符号化。
   (1) 没有不能表示成分数的有理数。
   (2) 在北京卖菜的不全是外地人。
   (3) 有的火车就比有的汽车快。
   (4) 说凡是汽车就比火车慢是不对的。

   解答.

(1) 令 $P(x)$ 表示 x 是有理数，$Q(x)$ 表示 x 是分数，则该命题可以表示为 $\neg\exists x(P(x)\land\neg Q(x))$。
(2) 令 $P(x)$ 表示 x 在北京卖菜，$Q(x)$ 表示 x 是外地人，则该命题可以表示为 $\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$。
(3) 令 $P(x)$ 表示 x 是火车，$Q(x)$ 表示 x 是汽车，$R(x,y)$ 表示 x 比 y 快，则该命题可以表示为 $\exists x\exists y(P(x)\land Q(y)\land R(x,y))$。
(4) 令 $P(x)$ 表示 x 是火车，$Q(x)$ 表示 x 是汽车，$R(x,y)$ 表示 x 比 y 慢，则该命题可以表示为 $\neg(\forall x\forall y((P(x)\land Q(y))\to R(y,x)))$。

□

4. 假设符号集包括常量 a, 函数 f，谓词符号 F,G。给定解释 $I=(\mathbb{R},\mathfrak{a})$ 和赋值 σ 如下：

(1) 个体域为实数集合 $\mathbb{R}$。
(2) $\mathfrak{a}(a)=0$。
(3) $\mathfrak{a}(f)(x,y)=x-y$.
(4) $\mathfrak{a}(F)(x,y)=x\equiv y,\ \mathfrak{a}(G)(x,y)=x<y$.
(5) $\sigma(x)=1,\ \sigma(y)=-1$

给出下列公式在 I 和 σ 下的解释，并指出它们的真值。

(1) $\forall x(G(x,y)\to\exists yF(x,y))$.
(2) $\forall y(F(f(x,y),a)\to\forall xG(x,y))$.

解答.

(1) 该公式在 I 和 σ 下的解释为 $\forall x(x<-1\to\exists y\ x\equiv y)$，在 I 和 σ 下为真。
(2) 该公式在 I 和 σ 下的解释为 $\forall y(1-y\equiv 0\to\forall x\ x<y)$，在 I 和 σ 下为假。

□

5. 判断下列公式的类型。

(1) $F(x)\to\forall xF(x)$
(2) $\exists xF(x)\to F(x)$
(3) $(\forall xF(x)\to\forall xG(x))\to\forall x(F(x)\to G(x))$

解答.

(1) 该公式为可满足式。
   - 令解释 I 取为 $(\mathbb{R},\mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{a}(F)(x)=x\geq 0$，赋值 σ 满足；$\sigma(x)=1$, 则该公式在 I 下为假。
   - 令解释 I 取为 $(\mathbb{N},\mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{a}(F)(x)=x\geq 0$，赋值 σ 满足；$\sigma(x)=1$, 则该公式在 I 下为真。
(2) 该公式为可满足式。
   - 令解释 I 取为 $(\mathbb{R},\mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{a}(F)(x)=x\geq 0$，赋值 σ 满足；$\sigma(x)=-1$, 则该公式在 I 下为假。
   - 令解释 I 取为 $(\mathbb{N},\mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{a}(F)(x)=x\geq 0$，赋值 σ 满足；$\sigma(x)=1$, 则该公式在 I 下为真。
(3) 该公式为可满足式。

- 令解释 I 取为 $(\mathbb{R}, \mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{a}(F)(x) = x \geq 0$，$\mathfrak{a}(G)(x) = x \leq 0$，则该公式在 I 下为假。
- 令解释 I 取为 $(\mathbb{N}, \mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{a}(F)(x) = x \geq 0$，$\mathfrak{a}(G)(x) = x \leq 0$, 则该公式在 I 下为真。

$\square$