离散数学 Lecture 5

第六周作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2023 年 11 月 28 日

1. 设个体域 $\mathcal{D}=\{a,b,c\}$，消去下列各式的量词。

   - $\forall x\exists y(F(x)\wedge G(y))$.
   - $\forall x(F(x,y)\to\exists yG(y))$

   解答.

   - $(F(a)\cap F(b)\cap F(c))\cup(G(a)\cup G(b)\cup G(c))$。
   - $(F(a,y)\cup F(b,y)\cup F(c,y))\to(G(a)\cup G(b)\cup G(c))$。

   □

2. 请指出下列等值演算的中的两处错误。

$$\begin{aligned}&\neg\exists x\forall y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))\\ \Leftrightarrow\ &\forall x\exists y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))\\ \Leftrightarrow\ &\forall x\exists y((F(x)\wedge G(y))\to H(x,y))\end{aligned}$$

   解答. 两处错误分别在

   (1) 第一步，$\neg\exists x\forall y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))$ 的否定应该是 $\forall x\exists y\neg((F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y))))$。
   (2) 第二步，$F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y))\not\Leftrightarrow(F(x)\wedge G(y))\to H(x,y)$

   □

3. 求下列各式的前束范式。

   - $\forall xF(x)\to\forall yG(x,y)$
   - $\forall x(F(x,y)\to\exists yG(x,y,z))$

   解答.

   - $\exists u\forall y(\neg F(u)\vee G(x,y))$
   - $\forall x\exists u(\neg F(x,y)\vee G(x,u,z))$.

   □

4. 请给出一个实例说明，利用 $\exists_+$ 和 $\exists_-$ 规则进行推理时如果变元和常量不符合使用规则，就会得到错误的结论。

解答. 我们对如下的两个规则进行说明:

$$\exists_-: \quad \begin{array}{rr} & \Gamma \\ & \exists x A(x) \\ \hline \therefore & A(c) \end{array}$$

$$\exists_+: \quad \begin{array}{rr} & \Gamma \\ & A(c) \\ \hline \therefore & \exists x A(x) \end{array}$$

- $\exists_-$ 规则: $\exists x P(x) \stackrel{def}{=} \exists x(x \neq 0)$ 在实数域是成立的, 但 $P(c) = c \neq c$ 是错误的,
- $\exists_+$ 规则: $P(0) \stackrel{def}{=} \exists x(x \neq 0)$ 在实数域是成立的, 但是 $\exists x P(x) = \exists x \exists x(x \neq x)$ 是不成立的。

□

5. 在自然推理系统 $N_{\mathscr{L}}$ 中, 构造下列推理的证明。

- 前提: $\exists x F(x) \to \forall y((F(y) \vee G(y)) \to R(y))$, $\exists x F(x)$
  结论: $\exists x R(x)$.
- 前提: $\exists x F(x) \to \forall x G(x)$.
  结论: $\forall x(F(x) \to G(x))$.

解答.

- 由 $\exists x F(x) \to \forall y((F(y) \vee G(y)) \to R(y))$, $\exists x F(x)$ 证明 $\exists x R(x)$:
  (1) $\exists x F(x) \to \forall y((F(y) \vee G(y)) \to R(y))$(前提)
  (2) $\exists x F(x)$(前提)
  (3) $\forall y((F(y) \vee G(y)) \to R(y)$(分离, 1, 2)
  (4) $F(c)$ ($\exists_-$, 2)
  (5) $F(c) \vee G(c)$(附加, 4)
  (6) $(F(c) \vee G(c)) \to R(c)$ ($\forall_-$, 3)
  (7) $R(c)$(分离, 5, 6)
  (8) $\exists x R(x)$ ($\exists_+$, 7)
- 由 $\exists x F(x) \to \forall x G(x)$ 证明 $\forall x(F(x) \to G(x))$:
  (1) $\exists x F(x) \to \forall x G(x)$(前提)
  (2) $\forall x \forall y(F(x) \to G(y))$(置换,1)
  (3) $\forall x(F(x) \to G(x))$ ($\forall_-$, 2)

□