离散数学 LECTURE 6

第七周作业

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2023 年 11 月 28 日

1. 求下列集合的幂集：

- $\{a,b,c\}$。
- $\{1,\{2,3\}\}$。
- $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$。

解答.

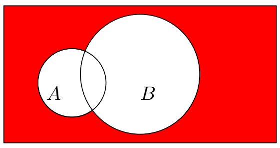
- $\mathscr{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.
- $\mathscr{P}(\{1,\{2,3\}\}) = \{\emptyset,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$.
- $\mathscr{P}(\{\emptyset,\{\emptyset\}\}) = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.

□

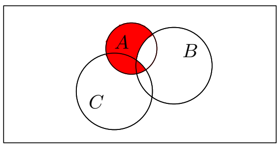
2. 画出下列集合的文氏图：

- $\bar{A}\cap\bar{B}$
- $A\cap(\bar{B}\cup C)$

解答. 两个表达式的文氏图分别如下所示 (红色部分)：



$\bar{A}\cap\bar{B}$



$A\cap(\bar{B}\cup C)$

□

3. 化简下列集合表达式：

- $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)$.
- $((A\cup B\cup C)-(B\cup C))\cup A$.
- $\cup\{\{3,4\},\{\{3\},\{4\}\},\{3,\{3,4\}\},\{\{3\},4\}\}$.

(1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B) = B - A\cup B = \emptyset$.

(2) $((A\cup B\cup C)-(B\cup C))\cup A = A$

(3) $\cup\{\{3,4\},\{\{3\},\{4\},\},\{3,\{3,4\}\},\{\{3\},4\}\} = \{3,4,\{3\},\{4\},\{3,4\}\}$.

4. 对 60 个人的调查表明有 25 个人阅读《每周新闻》杂志，26 个人阅读《时代》杂志，26 个人阅读《财富》杂志，9 个人阅读《每周新闻》和《财富》杂志，11 个人阅读《每周新闻》和《时代》杂志，8 个人阅读《时代》和《财富》杂志，还有 8 个人什么杂志也不读。问：

- 有多少人只阅读《每周新闻》杂志？
- 有多少人每个杂志都阅读？

解答. 令有 x 个人三本杂志都读，则由容斥原理不难得到：

$$60 - 8 = 25 + 26 + 26 - 9 - 11 - 8 + x$$

解得 $x = 3$，因此：

- 有 $25 - 9 - 11 + 3 = 8$ 个人只阅读《每周新闻》杂志。
- 有 3 个人每个杂志都阅读。

□

5. 设 A, B, C 是任意集合，证明：

- $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.
- $(A - B) - C = (A - C) - B$.

解答.

- $$\begin{aligned} (A - B) - C &= (A \cap \bar{B}) - C \\ &= A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \\ &= A \cap (\overline{B \cup C}) \\ &= A - (B \cup C) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} (A - B) - C &= (A \cap \bar{B}) - C \\ &= (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} \\ &= (A \cap \bar{C}) \cap \bar{B} \\ &= (A - C) - B \end{aligned}$$

□

6. (这是一个挑战题，不要求大家一定要做。) 令 A 是一个自然数的集合，对于任何一个自然数 x，我们定义 $n_A(x)$ 为集合 A 中把 x 拆分成两个不同元素之和的方案总数。例如，对于集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 来说 $n_A(4) = 2$，$n_A(2) = 1$（因为 $4 = 1 + 3 = 0 + 4$，$2 = 0 + 2$），你是否能给出两个不相交的集合 A, B 满足：

- $A \cup B = \mathbb{N}$.
- 对于任何一个自然数 x，$n_A(x) = n_B(x)$.

解答. 其实通过枚举可以发现，每个元素都会存在在唯一的位置：

- $A = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, \ldots, \}$
- $B = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 \ldots, \}$

事实上我们对自然数做如下的划分，对于任何一个自然数 $x \in \mathbb{N}$，记 $od(x)$ 表示 x 的二进制表示中 1 的个数，定义：

- $A' = \{x \in \mathbb{N} | od(x) \equiv 0 \pmod 2\}$
- $B' = \{x \in \mathbb{N} | od(x) \equiv 1 \pmod 2\}$

我们将证明 A', B' 就是两个满足要求的集合。$A' \cup B' = \mathbb{N}$ 是显然的，我们下证其满足第二个条件。考虑任意 $x \in \mathbb{N}$，对任意 a_1，$a_2 \in A'$ 满足：

$$x = a_1 + a_2$$

令 $a_1 = (i_1 i_2 \ldots i_m)_2$，$a_2 = (j_1 j_2 \ldots j_n)_2$ 为其二进制表示，并且令 l 是从左到右两个数第一个不一样的位置，则我们定义：

$$b_1 = (i_1 i_2 \ldots i_{l-1} j_l i_{l+1} \ldots i_m)_2,\ b_2' = (j_1 j_2 \ldots j_{l-1} i_l j_{l+1} \ldots j_n)_2$$

即将该位置对换一下，显然 $b_1, b_2' \in B'$，并且有：

$$b_1 + b_2' = a_1 + a_2 = x$$

注意到这个映射实际上是个双射，因此我们有 $n_A(x) = n_B(x)$，证毕。 $\square$