离散数学 LECTURE 7

第八周作业-solution

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2023 年 11 月 28 日

1. 已知 $A = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$，求 $A \times \mathscr{P}(A)$.

解答. 注意到 A 有 4 个子集 $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$，因此：

$$\begin{aligned} A \times \mathscr{P}(A) = \{&(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\}), (\emptyset, \{\{\emptyset\}\}), (\emptyset, \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}), \\ &(\{\emptyset\}, \emptyset), (\{\emptyset\}, \{\emptyset\}), (\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}), (\{\emptyset\}, \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\})\} \end{aligned}$$

□

2. 令 $R = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$，求 $R \circ R, R^{-1}, R \upharpoonright \{0,1\}, R[\{1,2\}], R^3, R^4$.

解答. 由定义可知：

- $R \circ R = \{(0,2), (0,3), (1,3)\}$
- $R^{-1} = \{(1,0), (2,0), (3,0), (2,1), (3,1), (3,2)\}$
- $R \upharpoonright \{0,1\} = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3)\}$
- $R[\{1,2\}] = \{2,3\}$
- $R^3 = \{(0,3)\}$
- $R^4 = \emptyset$

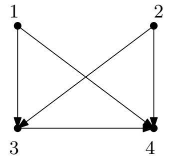
□

3. 给定 $A = \{1,2,3,4\}$ 和其上的关系 $R = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$，请问：

- R 的关系图和关系矩阵是怎么样的？
- R 满足什么关系？
- 求 R 的自反闭包、传递闭包、对称闭包和自反对称传递闭包。

解答.

(1) R 的关系图和关系矩阵如下所示：



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) R 是反自反、传递的。

(3) 请注意在求自反传递对称闭包的时候，一定要先求对称闭包，再求传递闭包。

- 自反闭包：$r(R) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- 传递闭包：$t(R) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

- 对称闭包：$s(R)=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2)\}$
- 自反对称传递闭包：$tsr(R)=E_R$，即是全关系。

□

4. 请给出下列命题的证明：

- 令 R 是 A 上的一个关系，则 $s(R)=R\cup R^{-1}$
- 证明 $s(t(R))\subseteq t(s(R))$，并给出一个反例说明 $\subseteq$ 不能改为 $=$.

解答.

- 要证明 $s(R)=R\cup R^{-1}$，只要证明 $s(R)\subseteq R\cup R^{-1}$ 和 $R\cup R^{-1}\subseteq s(R)$ 即可。
  - $s(R)\subseteq R\cup R^{-1}$：$\forall(x,y)\in s(R)$，$(x,y)\in R\vee(y,x)\in R$，因此 $(x,y)\in R\cup R^{-1}$，因此 $s(R)\subseteq R\cup R^{-1}$.
  - $R\cup R^{-1}\subseteq s(R)$：$\forall(x,y)\in R\cup R^{-1}$，$(x,y)\in R\vee(y,x)\in R$，因此 $(x,y)\in s(R)$，因此 $R\cup R^{-1}\subseteq s(R)$.

  因此 $s(R)=R\cup R^{-1}$.
- 注意到 $R\subseteq s(R),R\subseteq t(R)$，从而 $t(R)\subseteq t(s(R))$，$s(t(R))\subseteq s(t(s(R)))$。由于 $s(t(s(R)))=t(s(R))$，因此 $s(t(R))\subseteq t(s(R))$.

  反过来则不一定成立，考虑 $R=\{(1,2),(2,3)\}$，则：
  - $s(t(R))=\{(1,2),(2,3),(1,3),(2,1),(3,2),(3,1)\}$
  - $t(s(R))=\{(1,2),(2,3),(3,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$，即全关系。

□

Remark 0.1

第二问通过 $R_1\subseteq R_2$ 则 R_1 的闭包一定是 R_2 的闭包的子集这一结论，可以简化证明过程。

5. 令 $A=\{a,b,c,d\}$，在 $A\times A$ 上定义二元关系 R:

$$\forall(u,v),\ (x,y)\in A\times A,(u,v)R(x,y)\Rightarrow u+y=x+v$$

- 证明 R 是 $A\times A$ 上的等价关系。
- 确定相应的等价类，以及对 A 的划分。

解答.

(1) 要证明 R 是 $A\times A$ 上的等价关系，只要证明 R 满足自反性、对称性和传递性即可。
- 自反性：$\forall(x,y)\in A\times A$，$x+y=x+y$，因此 R 满足自反性。
- 对称性：$\forall(u,v)$，$(x,y)\in A\times A$，$(u,v)R(x,y)\Rightarrow u+y=x+v\Rightarrow x+v=u+y\Rightarrow(x,y)R(u,v)$，因此 R 满足对称性。
- 传递性：$\forall(u,v)$，(x,y)，$(z,w)\in A\times A$，$(u,v)R(x,y)\wedge(x,y)R(z,w)\Rightarrow u+y=x+v\wedge x+y=z+w\Rightarrow u+y=z+w\Rightarrow(u,v)R(z,w)$，因此 R 满足传递性。

(2) $A\times A$ 的等价类如下：
  (i) $[((a,a),(a,a))]=E_{\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}}$
  (ii) 其他每个元素都是一个等价类。

从而对 $A \times A$ 的划分为:

$$\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\},\{(a,b)\},\{(a,c)\},\{(a,d)\},\{(b,a)\},$$
$$\{(b,c)\},\{(b,d)\},\{(c,a)\},\{(c,b)\},\{(c,d)\},\{(d,a)\},\{(d,b)\},\{(d,c)\}$$

$\square$

Remark 0.2

这道题其实打错了:

- $A = \{1,2,3,4\}$；这样导致最后的等价类不会太过平凡。
- 第二问应该是 $A \times A$ 的划分，因为 R 是一个定义在 $A \times A$ 上的等价关系，不是 A 上的。