

第九周作业-solution

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2023 年 11 月 23 日

1. 令 $A = \{1, 2, \dots, 12\}$, \preceq 是整除关系, 令

$$B = \{x | x \in A \wedge 2 < x \leq 8\}$$

在偏序集 (A, \preceq) 中求 B 的上界、下界、最小上界和最大下界。

解答. $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, 因此:

- B 的上界: \emptyset
- B 的最小上界: \emptyset
- B 的下界: 1
- B 的最大下界: 1

□

2. 设 (A, R) 是偏序集, 在 A 上定义新的关系 S 如下: $\forall x, y \in A, xSy \Leftrightarrow yRx$, 并称 S 为 R 的对偶关系。

(1) 证明: S 也是 A 上的偏序关系。

(2) 如果 R 是整数集合上的小于等于关系, 则 S 是什么关系? 如果 R 是正整数集合上的整除关系, 则 S 是什么关系?

解答. (1) 要证明 S 是 A 上的偏序关系, 只要证明 S 满足自反性、反对称性和传递性即可。

- 自反性: $\forall x \in A, xRx$, 因此 S 满足自反性。
- 反对称性: $\forall x, y \in A, xSy \wedge ySx \Rightarrow yRx \wedge xRy \Rightarrow x = y$, 因此 S 满足反对称性。
- 传递性: $\forall x, y, z \in A, xSy \wedge ySz \Rightarrow yRx \wedge zRy \Rightarrow zRx \Rightarrow xSz$, 因此 S 满足传递性。

(2) 如果 R 是整数集合上的小于等于关系, 则 S 是整数集合上的大于等于关系。如果 R 是正整数集合上的整除关系, 则 S 是正整数集合上的被整除关系。

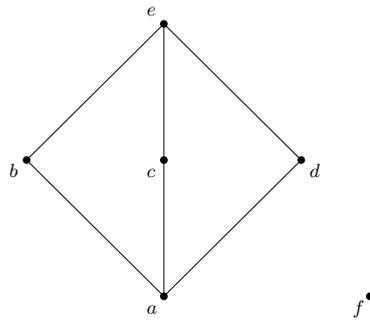
□

3. 画出如下偏序集的 Hasse 图:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad R_{\leq} = \{(a, d), (a, c), (a, b), (a, e), (b, e), (c, e), (d, e)\} \cup I_A$$

并指出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元。

解答. 其 Hasse 图如下所示:



- 极小元: a, f
- 极大元: e, f
- 最小元: 无
- 最大元: 无

□

4. 针对下列哈斯图，写出对应集合以及偏序关系。

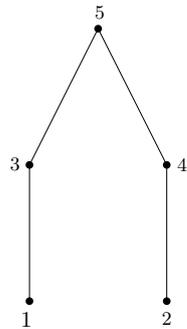


图 (a)

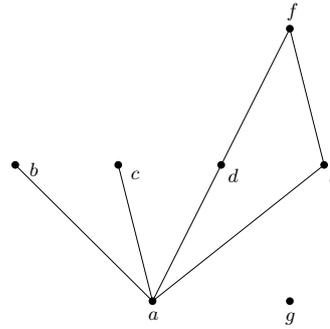


图 (b)

解答. 由 Hasse 图可得对应集合 A 和相应偏序关系 R 如下:

(1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{(1, 3), (1, 5), (3, 5), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\} \cup I_A$

(2) $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (d, f), (e, f)\} \cup I_A$

□