

## 第九周作业-solution

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2023 年 11 月 23 日

1. 令  $A = \{1, 2, \dots, 12\}$ ,  $\preceq$  是整除关系, 令

$$B = \{x | x \in A \wedge 2 < x \leq 8\}$$

在偏序集  $(A, \preceq)$  中求  $B$  的上界、下界、最小上界和最大下界。

解答.  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ , 因此:

- $B$  的上界:  $\emptyset$
- $B$  的最小上界:  $\emptyset$
- $B$  的下界: 1
- $B$  的最大下界: 1

□

2. 设  $(A, R)$  是偏序集, 在  $A$  上定义新的关系  $S$  如下:  $\forall x, y \in A, xSy \Leftrightarrow yRx$ , 并称  $S$  为  $R$  的对偶关系。

(1) 证明:  $S$  也是  $A$  上的偏序关系。

(2) 如果  $R$  是整数集合上的小于等于关系, 则  $S$  是什么关系? 如果  $R$  是正整数集合上的整除关系, 则  $S$  是什么关系?

解答. (1) 要证明  $S$  是  $A$  上的偏序关系, 只要证明  $S$  满足自反性、反对称性和传递性即可。

- 自反性:  $\forall x \in A, xRx$ , 因此  $S$  满足自反性。
- 反对称性:  $\forall x, y \in A, xSy \wedge ySx \Rightarrow yRx \wedge xRy \Rightarrow x = y$ , 因此  $S$  满足反对称性。
- 传递性:  $\forall x, y, z \in A, xSy \wedge ySz \Rightarrow yRx \wedge zRy \Rightarrow zRx \Rightarrow xSz$ , 因此  $S$  满足传递性。

(2) 如果  $R$  是整数集合上的小于等于关系, 则  $S$  是整数集合上的大于等于关系。如果  $R$  是正整数集合上的整除关系, 则  $S$  是正整数集合上的被整除关系。

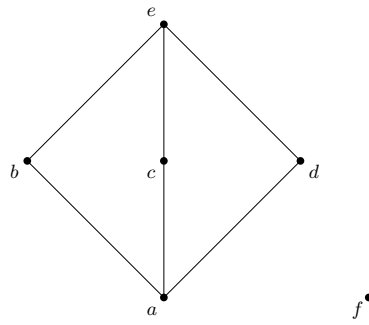
□

3. 画出如下偏序集的 Hasse 图:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad R_{\leq} = \{(a, d), (a, c), (a, b), (a, e), (b, e), (c, e), (d, e)\} \cup I_A$$

并指出  $A$  的极大元、极小元、最大元和最小元。

解答. 其 Hasse 图如下所示:



- 极小元:  $a, f$
- 极大元:  $e, f$
- 最小元: 无
- 最大元: 无

□

4. 针对下列哈斯图，写出对应集合以及偏序关系。

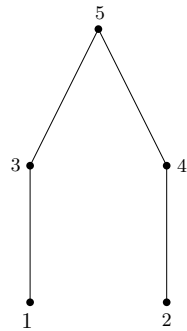


图 (a)

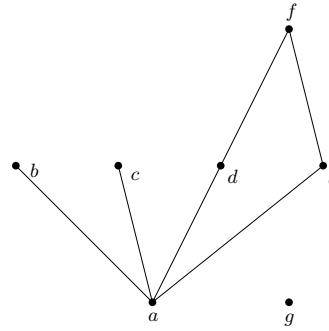


图 (b)

**解答.** 由 Hasse 图可得对应集合  $A$  和相应偏序关系  $R$  如下:

(1)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $R = \{(1, 3), (1, 5), (3, 5), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\} \cup I_A$

(2)  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (d, f), (e, f)\} \cup I_A$

□