

第十、十一周作业

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2023 年 11 月 17 日

截止日期 2023 年 11 月 27 日晚 23: 59

1. 令 $A = \{aab, bww, cds\}$, $B = \{0, 1\}$:
 - 判断下列关系是否是 A 到 B 的函数。
 - (1) $f = \{(aab, 0), (bww, 1), (cds, 0)\}$
 - (2) $f = \{(aab, 0), (bww, 1), (cds, 0), (aab, 1)\}$
 - 用列举法写出 A^B 的元素。
2. 判断下列函数是否是单射、满射、双射, 并给予证明。
 - (1) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x^2$.
 - (2) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x \bmod 3$.
 - (3) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是素数} \\ 0, & x \text{ 不是素数} \end{cases}$
 - (4) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$
 - (5) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$
3. 令 A, B 是两个有限集满足 $|A| = m, |B| = n$, 考虑如下问题:
 - (1) A 到 B 的函数有多少个?
 - (2) A 到 B 的满射有多少个?
 - (3) A 到 B 的单射有多少个? 并且由上述结论回答, A 到 B 的双射有多少个?
4. 设 $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, c, d, e\}$, $B = \{b, d, e, g, h\}$, 请分别写出 $A, B, A \cap B$ 的特征函数 $\chi_A, \chi_B, \chi_{A \cap B}$, 这三个函数满足什么关系?
5. 令 $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 其中 $f(n) = n + 1, g(n) = 2n, h(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 是奇数} \\ 0, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$ 求 $f \circ f, f \circ g, g \circ f, f \circ g \circ h, f(h(x))$.
6. 由定义证明: $[0, 1] \approx [a, b]$
7. 令 A 是一个集合, 证明 $\mathcal{P}(A) \approx \{0, 1\}^A$
(hint: $\{0, 1\}^A$ 里的每一个函数都是 A 中某个子集的特征函数)
8. 课上我们讲到停机问题是不可计算的, 请再给出一个函数 $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$, 这里 $\{0, 1\}^*$ 指的是由 0, 1 组成的任意长度的串, 证明它是不可计算的。
(hint: 这里可能需要用到的结论是, 我们可以把所有图灵机按某种顺序排列出来, 也就是说对于任何一个图灵机, 都可以找到一个自然数去代表它。然后使用对角线方法思考一下吧!)