第十、十一周作业-solution

LECTURER: 杨启哲 LAST MODIFIED: 2023 年 12 月 2 日

1. 令 $A = \{aab, bww, cds\}$，$B = \{0, 1\}$：

   - 判断下列关系是否是 A 到 B 的函数。
     (1) $f = \{(aab, 0), (bww, 1), (cds, 0)\}$
     (2) $f = \{(aab, 0), (bww, 1), (cds, 0), (aab, 1)\}$
   - 用列举法写出 A^B 的元素。

解答. (1) 是
(2) 不是

(1) 记 $f_1 = \{(0, aab), (1, aab)\}$，$f_2 = \{(0, aab), (1, bww)\}$，$f_3 = \{(0, aab), (1, cds)\}$，
$f_4 = \{(0, bww), (1, aab)\}$，$f_5 = \{(0, bww), (1, bww)\}$，$f_6 = \{(0, bww), (1, cds)\}$，
$f_7 = \{(0, cds), (1, aab)\}$，$f_8 = \{(0, cds), (1, bww)\}$，$f_9 = \{(0, cds), (1, cds)\}$，则

$$A^B = \{f_1, f_2, \cdots, f_9\}$$

□

2. 判断下列函数是否是单射、满射、双射，并给予证明。

   (1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2$.
   (2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = x \mod 3$.
   (3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{是素数} \\ 0, & x\text{不是素数} \end{cases}$
   (4) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x+1}$
   (5) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$

解答.

(1) 不是单射，因为 $f(1) = f(-1) = 1$；不是满射，因为 $f(x) = 1$ 无解；不是双射。
(2) 不是单射，因为 $f(0) = f(3) = 0$；不是满射，因为 $f(x) = 5$ 无解；不是双射。
(3) 不是单射，因为 $f(2) = f(3) = 1$；不是满射，因为 $f(x) = 5$ 无解；不是双射。
(4) f 是单射，因为 $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$；$f$ 不是满射，因为 $f(x) = -1$ 无解，f 不是双射。
(5) 是单射，因为 $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$；$f$ 是满射，因为对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 有 $f((x + y, x - y)) = (x, y)$；因此 f 是双射。

□

3. 令 A, B 是两个有限集满足 $|A| = m$，$|B| = n$，考虑如下问题：

(1) A 到 B 的函数有多少个?
(2) A 到 B 的满射有多少个?
(3) A 到 B 的单射有多少个? 并且由上述结论回答, A 到 B 的双射有多少个?

- 每个元素都有 n 种选择，因此有 n^m 个函数。
- 满射的个数等于函数的个数减去不满射的个数，因此由容斥原理可得一共有:
$$n^m - \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(n-i)^m$$
个满射函数。
- 单射的个数可以这样计算：先从 B 中选出 m 个元素，然后对这 m 个元素进行全排列，因此有 $m!\cdot\binom{n}{m}$ 个单射函数; 当 $m \neq n$ 时，双射个数为 0；当 $m = n$ 时，双射个数就是其单射个数，即 $m!\cdot\binom{n}{m} = n!$。

4. 设 $S = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，$A = \{a,c,d,e\}$，$B = \{b,d,e,g,h\}$，请分别写出 A，B，$A\cap B$ 的特征函数 χ_A，χ_B，$\chi_{A\cap B}$，这三个函数满足什么关系?

解答.

- $\chi_A = (1,0,1,1,1,0,0,0)$
- $\chi_B = (0,1,0,1,1,0,1,1)$
- $\chi_{A\cap B} = (0,0,0,1,1,0,0,0)$
- $\chi_{A\cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$

□

Remark 0.1

这里我们用了向量来简写对应的函数，第 i 位表示函数将 S 中第 i 个元素映射到的值。

5. 令 $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，其中 $f(n) = n+1$，$g(n) = 2n$，$h(n) = \begin{cases}1, & n\text{是奇数}\\ 0, & n\text{是偶数}\end{cases}$ 求 $f\circ f$，$f\circ g$，$g\circ f$，$f\circ g\circ h$，$f(h(x))$.

解答.

- $f\circ f(n) = f(f(n)) = n+2$
- $f\circ g(n) = g(f(n)) = 2n+2$
- $g\circ f(n) = f(g(n)) = 2n+1$
- $f\circ g\circ h(n) = h(g(f(n))) = h(2n+2) = 0$
- $f(h(x)) = \begin{cases}2, & x\text{是奇数}\\ 1, & x\text{是偶数}\end{cases}$

□

6. 由定义证明：$[0,1]\approx[a,b]$

解答. 定义 $f:[0,1]\to[a,b]$ 为 $f(x)=x(b-a)+a$，则 f 是一个双射。

- f 是单射，因为 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$。
- f 是满射，因为对于任意 $y\in[a,b]$，都有 $f(\frac{y-a}{b-a})=y$。

□

7. 令 A 是一个集合，证明 $\mathscr{P}(A)\approx\{0,1\}^A$

   (hint: $\{0,1\}^A$ 里的每一个函数都是 A 中某个子集的特征函数)

解答. 定义 $f:\mathscr{P}(A)\to\{0,1\}^A$ 为 $f(X)=\chi_X$，则 f 是一个双射。

- f 是单射，因为 $f(X_1)=f(X_2)\Rightarrow X_1=X_2$。
- f 是满射，因为对于任意 $\chi\in\{0,1\}^A$，都有 $f(\{x\in A|\chi(x)=1\})=\chi$。

□

8. 课上我们讲到停机问题是不可计算的，请再给出一个函数 $f:\{0,1\}^*\to\{0,1\}$，这里 $\{0,1\}^*$ 指的是由 $0,1$ 组成的任意长度的串，证明它是不可计算的。

   (hint：这里可能需要用到的结论是，我们可以把所有图灵机按某种顺序排列出来，也就是说对于任何一个图灵机，都可以找到一个自然数去代表它。然后使用对角线方法思考一下吧！)

解答. 定义 $f:\{0,1\}^*\to\{0,1\}$ 为 $f(x)=\begin{cases}1, & M_x(x)=0\\ 0, & M_x(x)=1\end{cases}$，其中 M_x 是一个图灵机，x 是其自然数表示。假设 f 是可计算的，则存在一个图灵机 M_{x_0}。考虑输入 x_0，则有：

- 若 $M_{x_0}(x_0)=1$，则 $M_{x_0}(x_0)=0$，矛盾。
- 若 $M_{x_0}(x_0)=0$，则 $M_{x_0}(x_0)=1$，矛盾。

因此 f 是不可计算的。 □

Remark 0.2

这里我们省略的一点是，对于每一个图灵机我们都可以用一个唯一的自然数去表示，因此我们可以像自然数一样对图灵机进行排序。每个图灵机都对应着一个可计算的函数，从而利用对角线方法可以构造出一个不可计算的函数。