

《离散数学》

14-复习 (Review)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2023年12月27日



› 课程总结

› 考试内容



课程总结

离散数学是研究离散对象的数学学科，是计算机学科的基础数学学科。

所学的内容

1. 数理逻辑。
2. 集合论。
3. 图论。
4. 组合计数。

数理逻辑是研究推理的内容。

- 命题逻辑
- 一阶逻辑

我们的关注内容：

- 用逻辑公式形式化命题。
- 逻辑公式的演算。
- 逻辑公式的推理。

- 命题逻辑的基本概念。
 - 命题与联结词的概念。
 - 命题逻辑研究的对象：命题公式。
 - 命题公式的真值。
- 命题逻辑的等值演算
 - 命题公式的等值演算。
 - 命题公式的范式：析取范式和合取范式，主合取范式与主析取范式。
 - 联结词的完备集。
 - 命题公式的可满足性—SAT 问题。
- 命题逻辑的推理
 - 自然推理系统 P。



- 一阶逻辑的基本概念。
 - 命题逻辑的局限性，量词的引入。
 - 一阶逻辑的研究对象：一阶逻辑公式。
 - 一阶逻辑公式的解释及其真值。
- 一阶逻辑的等值演算
 - 一阶逻辑公式的等值演算。
 - 一阶公式的范式-前束范式。
- 一阶逻辑公式的推理
 - 自然推理系统 $P_{\mathcal{L}}$ ，量词的推理规则。



集合论是研究集合的内容，也是数学的基本语言。

- 集合。
 - 集合的基本概念。(朴素集合论)
 - 集合的运算，有穷集的计数，容斥原理。
 - 朴素集合论的缺陷。
- 关系。
 - 关系的基本概念，有序二元组组成的集合。
 - 关系的性质及运算，关系的闭包。
 - 两种特殊的关系：等价关系与偏序关系。
- 函数。
 - 函数的基本概念，特殊的关系，单射/满射/双射。
 - 函数的性质及运算，复合和逆运算。
 - 集合的基数，比较无穷集合的大小。

图论是一个重要的离散对象，对研究事物及其之间的关系起到了重要的作用。

- 图的基本概念。
 - 无向图与有向图。
 - 图上的基本信息，如顶点的度数，度数列；图的运算，子图，增删操作；图的同构。
 - 图的代数表示：邻接矩阵、关系矩阵和邻接表
- 图的连通性
 - 两个点之间的路径，简单通路（回路）、初级通路（回路）。
 - 图的连通性，无向图连通性的衡量，有向图不同的连通概念（强连通、弱连通、单向连通）
 - 特殊的路，欧拉通路（回路）与哈密顿通路（回路）
- 特殊的图-树
 - 树的不同等价定义，最小连通性的图，最大连通无回路的图。
 - Cayley 公式
 - 生成树的计算，Prim 算法与 Kruskal 算法。
 - 最优二叉树的计算，即 Huffman 树。

计数问题也是计算机科学中重要问题，其可以回答枚举的可能性。

- 计数的基本方法
 - 计数的基本原理，加法原理等。
- 组合数
 - 组合数的实际意义。
 - 组合恒等式，证明方法，二项式定理。
 - 组合数与阶乘的估计
- 生成函数
 - 组合数的推广。
 - 生成函数的基本概念。
 - 利用生成函数计数。
 - Catalan 数。

▶ 考试内容

考试安排

- 考试地点：奉贤 2 教楼 221
- 考试时间：2021 年 1 月 10 日 (周三) 8:30-10:00，共 90 分钟。

试卷构成

试卷 = 20 分填空题 + 20 分选择题 + 30 分综合题 + 30 分证明题

- 填空题一共 10 道，每道 2 分，共 20 分。
- 选择题一共 10 道，每道 2 分，共 20 分。
- 综合题一共 3 道，每道 10 分，共 30 分。
- 综合题一共 3 道，每道 10 分，共 30 分。

问题 1.

- 谓词公式 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(y)) \vee Q(x, y)$ 中量词 $\forall x$ 的辖域为 _____.
- 已知命题公式 $A(x, y, z)$ 的主析取范式为 $m_{001} \vee m_{100} \vee m_{110}$, 则该公式的主合取范式为 _____.
- 令 F 是 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系, $F = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$, 则 F 的对称闭包是 _____.
- n 阶完全图的边数为 _____.
- 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ 的正整数解个数为 _____.

解 2.

- $P(x) \rightarrow Q(y)$
- $M_0 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_5 \wedge M_7$
- $s(F) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$
- $n(n-1)/2$
- $\binom{20}{3}$.

问题 3.

- 令 $F(x)$ 表示 x 是有理数, $G(x)$ 表示 x 是实数, 则命题“所有的有理数都是实数, 但有的实数不是有理数”的符号化为 ()

(A) $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \wedge \exists x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$ (B) $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \wedge \exists x(G(x) \wedge \neg F(x))$
 (C) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge \exists x(G(x) \wedge \neg F(x))$ (D) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge \exists x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$
- 下列序列中, 可构成无向简单图的结点度序列的是 ()

(A) (1, 2, 3, 4) (B) (2, 3, 1, 2) (C) (1, 2, 2, 2) (D) (1, 1, 3, 3)
- 下列说法错误的是 ()

(A) n 个结点的树有 $n - 1$ 条边 (B) n 个结点的连通图至少有 $n - 1$ 条边
 (C) 奇数个顶点的二分图没有哈密顿回路。 (D) 无向连通带权重图的最小生成树唯一
- 下列集合中跟有理数集合等势的是 ()

(A) 平面直角坐标系上所有点的集合 (B) 整数集合 (C) $[0, 1]$ (D) 实数集合

解 4.

1. C 2. B 3. D 4. B

问题 5.

1. 用等值演算的方式证明: $(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
2. 用任何一种方式给出下列推理的证明:
 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow R(x)):$

解 6.

1. 由基本等值式可得:

$$(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \quad (\text{蕴含等值式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \quad (\text{德摩根律})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \quad (\text{蕴含等值式})$$

2. 证明如下:

$$2.1 \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \text{前提引入}$$

$$2.2 \quad P(x) \rightarrow Q(x) \quad \forall_-$$

$$2.3 \quad \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \quad \text{前提引入}$$

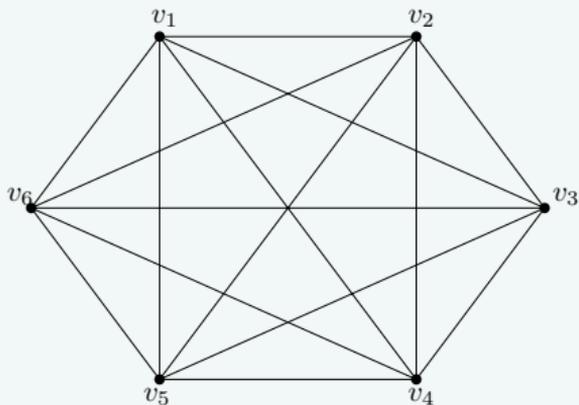
$$2.4 \quad Q(x) \rightarrow R(x) \quad \forall_-$$

$$2.5 \quad P(x) \rightarrow R(x) \quad p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$$

$$2.6 \quad \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \quad \forall_+$$

问题 7.

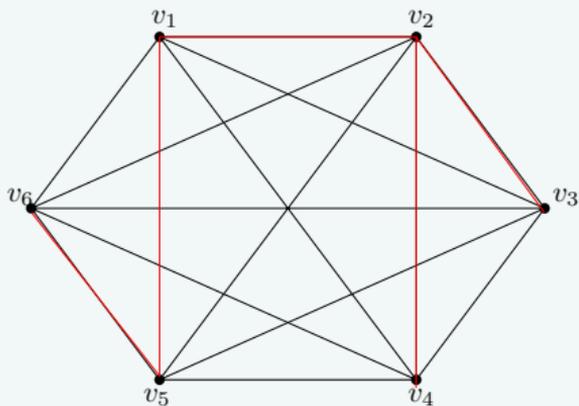
现有 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 共六村子需要修路，村子间修路的成本见下图，单位是万元现要求 v_1 和 v_2 间必修一条直达路， v_5 和 v_6 间也需要修一条直达路。请找一个满足上面要求，而且保证六个村子间连通的成本最小的修路方案，并计算出最小的修路成本。



$$\begin{aligned}
 \text{cost}(v_1, v_2) &= 14 & \text{cost}(v_2, v_3) &= 10 & \text{cost}(v_3, v_5) &= 12 \\
 \text{cost}(v_1, v_3) &= 13 & \text{cost}(v_2, v_4) &= 9 & \text{cost}(v_3, v_6) &= 18 \\
 \text{cost}(v_1, v_4) &= 15 & \text{cost}(v_2, v_5) &= 14 & \text{cost}(v_4, v_5) &= 10 \\
 \text{cost}(v_1, v_5) &= 10 & \text{cost}(v_2, v_6) &= 19 & \text{cost}(v_4, v_6) &= 15 \\
 \text{cost}(v_1, v_6) &= 12 & \text{cost}(v_3, v_4) &= 80 & \text{cost}(v_5, v_6) &= 80
 \end{aligned}$$

解 8.

其实就是要求包含 (v_1, v_2) , (v_5, v_6) 的最小生成树。



$$\begin{array}{lll}
 \text{cost}(v_1, v_2) = 14 & \text{cost}(v_2, v_3) = 10 & \text{cost}(v_3, v_5) = 12 \\
 \text{cost}(v_1, v_3) = 13 & \text{cost}(v_2, v_4) = 9 & \text{cost}(v_3, v_6) = 18 \\
 \text{cost}(v_1, v_4) = 15 & \text{cost}(v_2, v_5) = 14 & \text{cost}(v_4, v_5) = 10 \\
 \text{cost}(v_1, v_5) = 10 & \text{cost}(v_2, v_6) = 19 & \text{cost}(v_4, v_6) = 15 \\
 \text{cost}(v_1, v_6) = 12 & \text{cost}(v_3, v_4) = 80 & \text{cost}(v_5, v_6) = 80
 \end{array}$$

最小成本为: $9 + 10 + 10 + 14 + 80 = 123$.

问题 9.

设 $G = (V, E)$ 是非平凡的无向图, 满足 $|V| = n, |E| = m$. 证明如果 $m \geq n$, 则 G 中一定有圈。

证明. 我们对 n 进行归纳, $n = 1$ 时由于只有自环, 命题成立。

假设命题对 $\leq n - 1$ 个点的图 G 均成立, 考察 $|V| = n$ 的情况。我们可以不妨假设 G 是连通的, 否则存在一个连通分支 (V', E') 满足 $|V'| < n, |E'| > |V'|$, 从而由归纳假设其存在一个圈。现在考虑 G 中的一条边 (u, v) :

- (u, v) 不是割边, 即去除 (u, v) 后还存在一条 u 到 v 的路径 π , 则 $(u, v)\pi$ 是一个圈。
- (u, v) 是割边, 则删去 (u, v) 后图 G 被分解成两个连通分支, 注意到其一定存在一个连通分支 (V', E') 满足 $|V'| < n, |E'| > |V'|$, 从而由归纳假设其存在一个圈。

从而命题对 n 也成立。 □

问题 10.

证明如下组合恒等式:

- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$
- $\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$

证明.

- 注意到 $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$, 对其求两次导可得:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} x^{i-1}, \quad n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{i=0}^n i(i-1) \binom{n}{i} x^{i-2}$$

令 $x=1$ 即可得到等式左边的两个式子, 而右边的式子为 $n(n+1)2^{n-2}$, 从而两边相等。

□

证明续.

- 我们用一个组合的方式来证明：考察一个大小为 n 的集合 A ，其中有三个特殊元素 a, b, c ，考察所有包含 a, b, c 至少一个元素的取法：
 - 该取法个数相当于所有 k 个元素的取法减去不包含 a, b, c 的取法，即 $\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k}$ 。
 - 该取法也可以分成如下三类：
 1. 包含 a_1 ，一共有 $\binom{n-1}{k-1}$ 种取法。
 2. 不包含 a_1 ，但包含 a_2 ，一共有 $\binom{n-2}{k-1}$ 种取法。
 3. 不包含 a_1, a_2 ，但包含 a_3 ，一共有 $\binom{n-3}{k-1}$ 种取法。

从而我们有：

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$$

□

祝大家考试顺利！ 提前祝大家新年快乐！