

# 《离散数学》

## 4-一阶逻辑 (I)(First-order Logic(I))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2023年10月12日

- 基本概念
  - 个体词、谓词、量词。
  - 自然语句的形式化。
- 一阶逻辑公式
  - 字符表、项的概念
  - 解释的概念

- › 一阶逻辑等值式
- › 一阶逻辑的前束范式
- › 一阶逻辑的推理

## ► 一阶逻辑等值式

如果没有特殊说明的话，我们讨论的公式都是假定由符号集  $\mathcal{G}$  定义出来的一阶语言  $\mathcal{L}$ 。

与命题逻辑相同，我们引入等值式的概念。两个一阶逻辑公式是等值的，直观上来说就是相等。从而我们有：

## 定义 1

## [一阶逻辑的等值式].

令  $A, B$  是两个一阶逻辑中的公式，称  $A, B$  是等值的，当且仅当对于任何一个对于公式的解释  $A$  和  $B$  都有相同的真值，记作  $A \Leftrightarrow B (A = B)$ 。

## 等价定义

令  $A, B$  是两个一阶逻辑中的公式，称  $A, B$  是等值的，当且仅当  $A \leftrightarrow B$  是永真式（普遍有效式）。

与命题逻辑不同的是，我们现在没有真值表这一手段来验证两个公式等值了！

## 命题逻辑等值公式

1.  $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
2.  $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A, A \rightarrow A \Leftrightarrow 1, A \leftrightarrow A \Leftrightarrow 1$
3.  $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$
4.  $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C, A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C, A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$
5.  $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$   
 $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$
6.  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$   
 $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow B$
7.  $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

### 命题逻辑等值公式

8.  $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0, A \rightarrow 1 \Leftrightarrow 1, 0 \leftrightarrow A \Leftrightarrow 1$
9.  $A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A, 1 \rightarrow A \Leftrightarrow A, 1 \leftrightarrow A \Leftrightarrow A, A \rightarrow 0 \Leftrightarrow \neg A, 0 \leftrightarrow A \Leftrightarrow \neg A$
10.  $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1, A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0, A \rightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg A, A \leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow 0$
11.  $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
12.  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
13.  $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
14.  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
15.  $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$
16. ...

在一阶逻辑公式中，原先命题逻辑公式的等值式依旧是成立的。

- 将原先的命题变项整体代换成谓词公式。

## 例 2.

下列公式都是等值的：

1.  $P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow (\neg P(x) \vee Q(x))$ 。
2.  $\neg(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$
3.  $\neg\neg(\forall xP(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x)$ 。
4.  $(\forall xP(x) \wedge Q(y)) \vee \exists zR(z) \Leftrightarrow (\forall xP(x) \vee \exists zR(z)) \wedge (Q(y) \vee \exists zR(z))$



考察对带有量词的公式的否定:

- $\neg\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)$ .
- $\neg\exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x\neg P(x)$ .

## 对上述等值式的理解

- 形式上来看,  $\neg$  可以越过量词, 但是量词需要进行变换。
- 从语义上理解, 如  $\neg\forall xP(x)$  表示的是“不是所有的  $x$  都满足  $P(x)$ ”, 即“存在一个  $x$  不满足  $P(x)$ ”, 即  $\exists x\neg P(x)$ 。
- 回顾有限域下量词的定义, 可以理解为其实际上是德摩根律的一种推广。

假设现在的个体域是有限的, 即  $\mathcal{D} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 我们来证明上述等值式。

1.  $\neg\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)$ .

$$\begin{aligned}\neg\forall xP(x) &\Leftrightarrow \neg(P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)) \\ &\Leftrightarrow \neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \dots \vee \neg P(a_n) \\ &\Leftrightarrow \exists x\neg P(x)\end{aligned}$$

2.  $\neg\exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x\neg P(x)$ .

$$\begin{aligned}\neg\exists xP(x) &\Leftrightarrow \neg(P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)) \\ &\Leftrightarrow \neg P(a_1) \wedge \neg P(a_2) \wedge \dots \wedge \neg P(a_n) \\ &\Leftrightarrow \forall x\neg P(x)\end{aligned}$$

我们只给出第一个证明，第二个的证明是几乎一样的。

$\neg\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)$  的证明.

- 设对于公式的解释  $\mathfrak{J}$  下我们有  $\neg\forall xP(x)$  为真，从而  $\forall xP(x)$  为假。即存在一个  $a_i \in \mathcal{D}$  使得  $P(a_i)$  为假，从而  $\neg P(a_i)$  为真。因此有  $\exists x\neg P(x)$  为真。
- 反过来设对于公式的解释  $\mathfrak{J}$  下我们有  $\exists x\neg P(x)$  为真，从而存在一个  $a_i \in \mathcal{D}$  使得  $\neg P(a_i)$  为真，从而  $P(a_i)$  为假。因此有  $\forall xP(x)$  为假，从而  $\neg\forall xP(x)$  为真。

□

1. 并非所有的动物都是猫。

令  $A(x)$ :  $x$  是动物,  $B(x)$ :  $x$  是猫, 则该命题可以表示为:  $\neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ .

并且我们有:

$$\neg\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x\neg(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$$

$\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$  表示存在一个动物不是猫, 意思是等同的。

2. 天下乌鸦一般黑。

令  $F(x)$ :  $x$  是乌鸦,  $G(x, y)$ :  $x$ 和 $y$  一般黑, 则该命题可以表示为:

$\forall x\forall y((F(x) \wedge F(y)) \rightarrow G(x, y))$ .

并且我们有:

$$\forall x\forall y((F(x) \wedge F(y)) \rightarrow G(x, y)) \Leftrightarrow \neg(\exists x\exists y((F(x) \wedge F(y)) \wedge \neg G(x, y)))$$

$\neg(\exists x\exists y((F(x) \wedge F(y)) \wedge \neg G(x, y)))$  表示不存在两只乌鸦一般黑, 意思是等同的。

我们之前说过，下述公式都是不相等的：

- $\forall x(P(x) \vee Q(x))$  与  $\forall xP(x) \vee Q(x)$ 。
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$  与  $\exists xP(x) \wedge Q(x)$ 。

但是当后半部分“ $Q(x)$ ”不包含该约束变元时，上述公式则可以成立，我们将其称为量词分配的等值式。

## 量词对 $\wedge, \vee$ 的分配律

当公式  $q$  不包含自由变元  $x$  的时候，我们有：

1.  $\forall x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee q$ 。
2.  $\forall x(P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge q$ 。
3.  $\exists x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee q$ 。
4.  $\exists x(P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge q$ 。

我们依旧只给出第一个证明，其余都是雷同的。

### 对 $\forall x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee q$ 的证明.

- 设在公式的解释  $\mathfrak{J}$  下，我们有  $\forall x(P(x) \vee q)$  为真。则对于任何的  $a_i \in \mathcal{D}$  我们有  $P(a_i) \vee q$  为真。
  - 若  $q$  为真，则  $\forall xP(x) \vee q$  为真.
  - 若  $q$  为假，则  $P(x)$  对于所有的  $a_i \in \mathcal{D}$  均为真，从而  $\forall xP(x)$  为真因此  $\forall xP(x) \vee q$  在对公式的解释  $\mathfrak{J}$  下也为真。
- 设在公式的解释  $\mathfrak{J}$  下，我们有  $\forall xP(x) \vee q$  为真。
  - 若  $q$  为真，则  $\forall x(P(x) \vee q)$  为真.
  - 若  $q$  为假，则  $\forall xP(x)$  为真，从而  $P(x)$  对于所有的  $a_i \in \mathcal{D}$  均为真，从而  $P(a_i) \vee q$  对于所有的  $a_i \in \mathcal{D}$  为真，从而  $\forall x(P(x) \vee q)$  为真.因此  $\forall x(P(x) \vee q)$  在对公式的解释  $\mathfrak{J}$  下也为真。

□

显然，量词对  $\rightarrow$  也有分配律。

## 量词对 $\rightarrow$ 的分配律

当公式  $p, q$  不包含自由变元  $x$  的时候，我们有：

1.  $\forall x(P(x) \rightarrow q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \rightarrow q$ 。
2.  $\exists x(P(x) \rightarrow q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow q$ 。
3.  $\forall x(p \rightarrow P(x)) \Leftrightarrow p \rightarrow \forall xP(x)$ 。
4.  $\exists x(p \rightarrow P(x)) \Leftrightarrow p \rightarrow \exists xP(x)$ 。

我们依旧只给出第一个证明，其余都是雷同的。但注意到  $\rightarrow$  其实可以由  $\wedge, \vee, \neg$  来表示，因此我们可以使用等值演算的方式。

**对  $\forall x(P(x) \rightarrow q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \rightarrow q$  的证明.**

我们有：

$$\begin{aligned} \forall x(P(x) \rightarrow q) &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee q) && (p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q) \\ &\Leftrightarrow \neg\neg\forall x(\neg P(x) \vee q) && (\neg\neg p \Leftrightarrow p) \\ &\Leftrightarrow \neg\exists x\neg(\neg P(x) \vee q) && (\neg\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)) \\ &\Leftrightarrow \neg\exists x(P(x) \wedge \neg q) && (\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q) \\ &\Leftrightarrow \neg(\exists xP(x) \wedge \neg q) && (\exists x(P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge q) \\ &\Leftrightarrow \neg(\exists xP(x)) \vee q && (\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q) \\ &\Leftrightarrow (\exists xP(x)) \rightarrow q && (p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q) \end{aligned}$$

□



## 一般情况下的分配律: $\forall$ 对 $\wedge$ , $\exists$ 对 $\vee$

当量词约束变元同时存在于两个公式的时候, 我们依旧存在一些分配律:

- $\forall$  对  $\wedge$ :  $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 。
- $\exists$  对  $\vee$ :  $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ 。

**注意: 另外两个分配律则不成立!**

这种情况下,  $\forall$  对  $\wedge$ ,  $\exists$  对  $\vee$  没有分配律, 即:

- $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall xP(x) \vee Q(x)$ 。
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge Q(x)$ 。

### 直观上的解释

事实上,  $\forall$  可以看作是对  $\wedge$  的推广,  $\exists$  是对  $\vee$  的推广。所以上述规律实际上是  $\forall, \wedge$  交换律的推广。但当  $\forall$  和  $\wedge$  交替的时候, 其是不能交换的。

我们依旧只给出第一个证明，另外一个雷同的。

**对  $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$  的证明.**

- 假设对于一个公式的解释  $\mathfrak{J}$  下  $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$  为真。则对于任何的  $a_i \in \mathcal{D}$  我们有  $P(a_i) \wedge Q(a_i)$  为真。从而  $P(a_i)$  为真， $Q(a_i)$  为真。因此  $\forall xP(x)$  和  $\forall xQ(x)$  均为真。因此  $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$  在解释  $\mathfrak{J}$  下也为真。
- 假设对于一个公式的解释  $\mathfrak{J}$  下  $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$  为真。则  $\forall xP(x)$  和  $\forall xQ(x)$  在该解释下均为真，即对于任何的  $a_i \in \mathcal{D}$ ， $P(a_i)$  和  $Q(a_i)$  均为真。因此  $P(a_i) \wedge Q(a_i)$  为真，从而  $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$  在解释  $\mathfrak{J}$  下也为真。

□

## ∀ 对 ∨、∃ 对 ∧ 不成立的理解 (I)

前面我们直观的介绍上述不成立的原因，现在我们从有限域  $\mathcal{D}_0 = \{1, 2\}$  上给出一个严格的证明。

**证明**  $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ .

我们有：

$$\begin{aligned}\forall x(P(x) \vee Q(x)) &\Leftrightarrow (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2)) \\ &\Leftrightarrow (P(1) \wedge P(2)) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2))\end{aligned}$$

而

$$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Leftrightarrow (P(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2))$$

因此： $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

□

从上述证明可以得到一个简单的推论:

- 在有限域  $\mathcal{D}_0 = \{1, 2\}$  中我们有  $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$ , 这里  $\Rightarrow$  表示如果前者为真则后者也为真。

事实上这一结论对任意论域都是成立的, 并且类似的结论对于  $\exists$  对  $\wedge$  也是成立的, 即:

- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ 。

### 消去量词

从上述例子我们也可以看到, 在论域是有限的情况下, 我们可以通过  $\forall, \exists$  把量词消去。

之前我们就提到过像  $\forall xP(x)$  与  $\forall yP(y)$  是等值的，也就是说，一些约束变元的名字是可以随意更改的。这一规则我们称为换名规则。

## 定义 3

## [换名规则].

令  $A$  是一个公式，若  $x$  是一个约束变元， $y$  是一个不在  $A$  中出现的变元，则  $A$  与  $A(x/y)$  等值，其中  $A(x/y)$  表示将  $A$  中约束  $x$  的量词辖域内的所有  $x$  替换成  $y$  得到的公式。

## 直观解释

直观上来说，我们可以将约束变元的名字随意更改，只要保证其不与其他的变元起冲突，就不影响公式的真值。

## 例 4.

考察如下公式:

- $\forall xF(x, y, z) \rightarrow \exists yG(x, y, z)$ 。
- $\forall x(F(x, y) \rightarrow \exists yG(x, y, z))$

通过上述的换名规则, 我们可以将其转换为如下等值的公式:

- $\forall tF(t, y, z) \rightarrow \exists wG(x, w, z)$ 。
- $\forall x(F(x, y) \rightarrow \exists wG(x, w, z))$

即通过上述的规则我们可以使得一个公式里面的变元要么是自由变元, 要么是约束变元。

最后我们给出两个一阶逻辑中等值演算的例子。

证明:  $\neg\exists x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$

证明. 我们有:

$$\begin{aligned}\neg\exists x(M(x) \wedge F(x)) &\Leftrightarrow \forall x\neg(M(x) \wedge F(x)) && (\neg\exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x\neg P(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x) \vee \neg F(x)) && (\text{De Morgan 律}) \\ &\Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x)) && (p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q)\end{aligned}$$

□

证明:  $\neg\forall x\forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$

证明. 我们有:

$$\begin{aligned}\neg\forall x\forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) &\Leftrightarrow \exists x\neg\forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \\ &\hspace{15em}(\neg\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)) \\ &\hspace{15em}(\neg\forall yP(y) \Leftrightarrow \exists y\neg P(y)) \\ &\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(\neg(F(x) \wedge G(y)) \vee H(x, y)) \\ &\hspace{15em}(p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q) \\ &\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y)) \quad (\text{De Morgan 律})\end{aligned}$$

□



## ► 一阶逻辑的前束范式

我们在命题逻辑中介绍了命题逻辑公式的范式-合取范式和析取范式。

范式是一种统一的表达形式，可以用来研究公式的性质。

- 在命题逻辑公式中，如果两个公式是等值的，则它们形成的析取范式(合取范式)也是等值的。
- 在命题逻辑公式中，如果两个公式是等值的，则它们形成的主析取范式(主合取范式)是完全一样的。

在一阶逻辑中，我们也有类似的范式概念。

我们来介绍最常用的一种范式：前束范式。

## 定义 5

[一阶逻辑的前束范式].

具有如下形式的公式称为一阶逻辑的前束范式：

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \varphi$$

这里  $Q_i$  是一个量词  $\forall, \exists$ 。  $\varphi$  是一个不含有量词的公式。

## 直观理解

前束范式的直观理解是：量词全部出现在公式的最前面，且量词的辖域包含整个公式。

## 例 6.

下述式子都是前束范式:

1.  $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)).$
2.  $\forall x \forall y \exists z ((F(x) \wedge G(y) \wedge H(z)) \rightarrow L(x, z)).$

下述式子不是前束范式:

1.  $\forall x G(x) \rightarrow \exists y F(x, y).$
2.  $\forall x \exists y (F(x) \rightarrow G(y)) \rightarrow \exists z G(z).$

## 定理 7

任何一阶逻辑公式都可以转换成等值的前束范式。

[前束范式存在定理].

简单来说，求前束范式需要做如下几件事：

1.  $\neg$  往右移。
2.  $\forall, \exists$  往左移。
3. 变元换成合适的名字。

我们用一个例子来展示前束范式怎么求。

求  $\neg(\forall x\exists yP(a, x, y) \rightarrow \exists x(\neg\forall yQ(y, b) \rightarrow R(x)))$  的前束范式

1. 消去  $\rightarrow, \leftrightarrow$  (非必需)

$$\circ \Leftrightarrow \neg(\neg(\forall x\exists yP(a, x, y)) \vee \exists x(\neg\neg\forall yQ(y, b) \vee R(x)))$$

2.  $\neg$  往右移。

$$\circ \Leftrightarrow \neg(\exists x\forall y\neg P(a, x, y)) \vee \exists x(\forall yQ(y, b) \vee R(x))$$

$$\circ \Leftrightarrow (\neg\exists x\forall y\neg P(a, x, y)) \wedge \neg\exists x(\forall yQ(y, b) \vee R(x))$$

$$\circ \Leftrightarrow \forall x\exists yP(a, x, y) \wedge \forall x(\exists y\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$$

3.  $\forall, \exists$  往左移 ”+” 变元易名。

$$\circ \Leftrightarrow \forall x(\exists yP(a, x, y) \wedge (\exists y\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x)))$$

$$\circ \Leftrightarrow \forall x(\exists yP(a, x, y) \wedge (\exists z\neg Q(z, b) \wedge \neg R(x)))$$

$$\circ \Leftrightarrow \forall x\exists y\exists z(P(a, x, y) \wedge \neg Q(z, b) \wedge \neg R(x))$$

$$\circ \Leftrightarrow \forall x\exists y\exists zS(a, b, x, y, z)$$

最后的  $S(a, b, x, y, z)$  可以视作是  $(P(a, x, y) \wedge \neg Q(z, b) \wedge \neg R(x))$  的一个概括表示。

前束范式只要求了量词出现在公式的最前面，但是并没有要求量词之间的顺序。因此事实上我们也可以定义出更严格的范式，如：

- 只有全称量词的范式 (Skolem 标准形)。
- 所有全称量词都在存在量词左面的范式。
- 所有存在量词都在全称量词左面的范式。

但遗憾的是，这种形式的转换不能完全的保证等值性。比如 Skolem 标准形只能保证在不可满足的意义下是一致的，即如果原来的公式是不可满足的则其 Skolem 标准形也是不可满足的。

在范式的最后我们介绍一下 Skolem 标准形，其能保证如果原来公式是不可满足的，则其 Skolem 标准形也是不可满足的。这样的转换在归结法中有着重要的应用。其核心的想法是，考虑如下的形式：

$$\forall x \forall y \exists z \exists w \dots$$

从语义上理解，表示为对任意的  $x$  和对于任意的  $y$ ，存在一个  $z$  和存在一个  $w$ ，因此  $z$  和  $w$  可以视作是依赖于  $x, y$  的，因此我们可以可以将  $z$  和  $w$  的选取认为是一个依赖于  $x, y$  的函数。

依照这个思路，我们可以将一个公式转换成 Skolem 标准形。



求一个公式的 Skolem 标准形首先要求出其前束范式，假设已经求好如下：

$$\exists x \forall y \forall z \exists w \forall u \exists v P(x, y, z, w, u, v)$$

我们从左往右审视所有的存在量词：

- $\exists x$  左边没有量词，因此我们直接用论域  $\mathcal{D}$  中的一个未在公式出现过的常元  $a$  去替代。
- $\exists w$  左边存在 2 个全称量词  $\forall y, \forall z$ ，所以用一个关于  $y, z$  的二元函数  $f(y, z)$  代替  $w$ 。
- $\exists v$  左边存在 3 个全称量词  $\forall y, \forall z, \forall u$ ，所以用一个关于  $y, z, u$  的三元函数  $g(y, z, u)$  代替  $w$ 。

从而其 Skolem 标准形为：

$$\forall y \forall z \forall u P(a, y, z, f(y, z), w, g(y, z, u))$$

一个公式和其 Skolem 标准形不等值！

## 一阶逻辑的推理

与命题逻辑相同，我们可以给出类似的推理形式。

- **推理形式**：由前提  $A_1, \dots, A_n$  推出  $B$  的推理形式为：

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B.$$

也用  $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash B$  表示。

- **正确推理**：如果  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$  是永真的，则由前提  $A_1, \dots, A_n$  推出  $B$  的推理是正确的，记为：

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B.$$

也用  $\{A_1, \dots, A_n\} \vDash B$  表示。

## 例 8.

考察下列推理：

所有的整数都是有理数，所有的有理数都是实数，所以所有的整数都是实数。

首先将其符号化，令  $P(x)$  表示  $x$  是实数， $Q(x)$  表示  $x$  是有理数， $R(x)$  是整数，则：

- 所有的整数是有理数： $\forall x(R(x) \rightarrow Q(x))$ 。
- 所有的有理数是实数： $\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$ 。
- 所有的整数是实数： $\forall x(R(x) \rightarrow P(x))$ 。

因此其推理形式为：

$$(\forall x(R(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x(Q(x) \rightarrow P(x)))) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow P(x))$$

很显然，上述推理是命题逻辑所不能处理的。

由代换实例，原先命题逻辑推理里的定律都是成立的。

### 推理定律 (I)

以下推理定律依旧正确，将其中的 A 和 B 换成一阶公式即可。

- $A \Rightarrow (A \vee B)$ (附加律).
- $A \wedge B \Rightarrow A$ (化简律).
- $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ (假言推理律).
- $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ (拒取式)
- $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ (析取三段论).
- $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$ (假言三段论)
- $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$ (等价三段论)
- ...

推理定律实际上就是蕴含式的永真式，因此由前面的讨论，还存在如下的推理定律：

### 推理定律 (II)

- $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow Q(x) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$
- $\exists x\forall yP(x, y) \Rightarrow \forall y\exists xP(x, y)$

相应的一阶逻辑系统里面，我们也有证明，也即所谓的演绎推理。

我们下面来介绍以一阶语言  $\mathcal{L}$  为基础的自然推理系统  $P_{\mathcal{L}}$ 。

自然，在  $P_{\mathcal{L}}$  中，其包括：

- 字母表即为  $\mathcal{L}$  中的符号表  $\mathcal{G}$ 。
- 所有的合式公式即为  $\mathcal{L}$  中的合式公式。
- 自然推理系统  $P$  的推理规则依旧存在。
- 没有公理规则。

为了处理量词，我们需要引入一些新的规则。

我们现在来介绍量词的推理规则，令  $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$  表示前提的集合。

- 全称量词消去规则  $\forall_-$

$$\frac{\Gamma}{\forall x A(x)}, \quad \frac{\Gamma}{\forall x A(x)}$$
$$\frac{}{\therefore A(y)}, \quad \frac{}{\therefore A(c)}$$

其中  $y$  是变元符号， $c$  是常量符号，并且  $x$  不出现在  $A(x)$  中  $\exists y, \forall y$  的辖域内。

- 全称量词引入规则  $\forall_+$

$$\frac{\Gamma}{A(y)}$$
$$\frac{}{\therefore \forall x A(x)}$$

其中  $y$  是不在  $\Gamma$  中出现的自由变元，并且我们假定  $x$  在  $A(y)$  中不作约束变元出现。



- 存在量词消去规则  $\exists_-$

$$\frac{\Gamma \quad \exists x A(x) \quad A(y) \rightarrow B}{\therefore B}, \quad \frac{\Gamma \quad \exists x A(x) \quad A(c) \rightarrow B}{\therefore B}$$

其中  $c$  是常量符号,  $x, y$  是变元符号, 并且  $c$  不出现、 $y$  不自由出现在  $\Gamma$  和  $A(x)$  和  $B$  里。

- 存在量词引入规则  $\exists_+$

$$\frac{\Gamma \quad A(c)}{\therefore \exists x A(x)}, \quad \frac{\Gamma \quad A(y)}{\therefore \exists x A(x)}$$

其中  $c$  是常量符号,  $x, y$  是变元符号, 并且  $c$  不出现、 $y$  不自由出现在  $\Gamma$  和  $A(x)$  和  $B$  中  $\forall x, \exists x$  的辖域里。

直观上来讲，上述规则想表示的是两点：

- 全称量词要求对所有的都成立。
- 存在量词要求至少有一个成立。

但由于引入了新的符号 (变量或者常量)，因此如果不仔细处理，可能会导致一些问题。

- 假设个体域是实数集  $\mathbb{R}$ ，考察  $A(x) \stackrel{\text{def}}{=} x > c$ ， $c$  是某个实数。则  $\exists x A(x)$  是成立的，但显然  $A(c)$  是不成立的。
- 假设个体域是实数集  $\mathbb{R}$ ，考察  $P(y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x x > y$ ，其是成立的，但是  $\forall x P(x) = \forall x \exists x x > x$  是不成立的。

## 替换的原则

能够替换的原则就在于，对于  $\forall$  来说，我们不能使用特定的变元引入全称量词，而对于  $\exists$  来说，我们不能用特定的常量来消去存在量词。

下述表达其实也是两个规则的等价形式:

- 存在量词消去规则  $\exists_-$

$$\frac{\Gamma \quad A(y) \rightarrow B}{\therefore \exists x A(x) \rightarrow B}, \quad \frac{\Gamma \quad A(c) \rightarrow B}{\therefore \exists x A(c) \rightarrow B}$$

其中  $c$  是常量符号,  $x, y$  是变元符号, 并且  $c$  不出现、 $y$  不自由出现在  $\Gamma$  和  $A(x)$  和  $B$  里。

- 存在量词引入规则  $\exists_+$

$$\frac{\Gamma \quad B \rightarrow A(y)}{\therefore B \rightarrow \exists x A(x)}, \quad \frac{\Gamma \quad B \rightarrow A(c)}{\therefore B \rightarrow \exists x A(x)}$$

其中  $c$  是常量符号,  $x, y$  是变元符号, 并且  $c$  不出现、 $y$  不自由出现在  $\Gamma$  和  $A(x)$  和  $B$  中  $\forall x, \exists x$  的辖域里。

## 例 9.

下述推理错在哪？

- 由前提  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ ,  $P(x)$  推出结论  $\forall xQ(x)$ :

1.  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

前提引入

2.  $P(x) \rightarrow Q(x)$

$\forall_-$

3.  $P(x)$

前提引入

4.  $Q(x)$

$\rightarrow$  消去

5.  $\forall xQ(x)$

$\forall_+$

考察如下的解释  $\mathfrak{J} = ((\mathbb{R}, \mathbf{a}), \sigma)$ , 其中  $\mathbf{a}(P)(x) : x$  是偶数,  $\mathbf{a}(Q)(x) : x$  被 2 整除,  $\sigma(x) = 2$ 。则  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  和  $P(x)$  都为真, 但是  $\forall xQ(x)$  为假。

**错误原因?**  $x$  是前提出现过的自由变量! 它不是任意的!

## 例 10.

- 由前提  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ ,  $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$  推出结论  $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$ :

1.  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

前提引入

2.  $P(x) \rightarrow Q(x)$

$\forall_-$

3.  $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$

前提引入

4.  $Q(x) \rightarrow R(x)$

$\forall_-$

5.  $P(x) \rightarrow R(x)$

$p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$

6.  $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$

$\forall_+$

## 例 11.

- 由前提  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ ,  $\exists x(P(x) \wedge R(x))$  推出结论  $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$ :

- |   |             |
|---|-------------|
| 1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$                           | 前提引入        |
| 2. $P(x) \rightarrow Q(x)$                                      | $\forall_-$ |
| 3. $\neg P(x) \vee Q(x)$  |             |
| 4. $\neg P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x)$                         |             |
| 5. $(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \vee Q(x)$                       |             |
| 6. $(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow Q(x)$                        |             |
| 7. $(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow R(x)$                        |             |
| 8. $(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))$          |             |
| 9. $(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$ | $\exists_+$ |
| 10. $\exists x(P(x) \wedge R(x))$                               | 前提引入        |
| 11. $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$                               | $\exists_-$ |



## 本章总结

- 一阶逻辑的等值演算
  - 带量词的等值公式。
- 一阶逻辑的范式。
  - 前束范式、Skolem 标准形。
- 一阶逻辑推理系统。
  - 量词推理规则。



## 本章总结

- 一阶逻辑的等值演算
  - 带量词的等值公式。
- 一阶逻辑的范式。
  - 前束范式、Skolem 标准形。
- 一阶逻辑推理系统。
  - 量词推理规则。

## 第六周作业

本周作业已经发布到课程主页上。

截至时间：2023 年 10 月 24 日周一晚上 23:59。